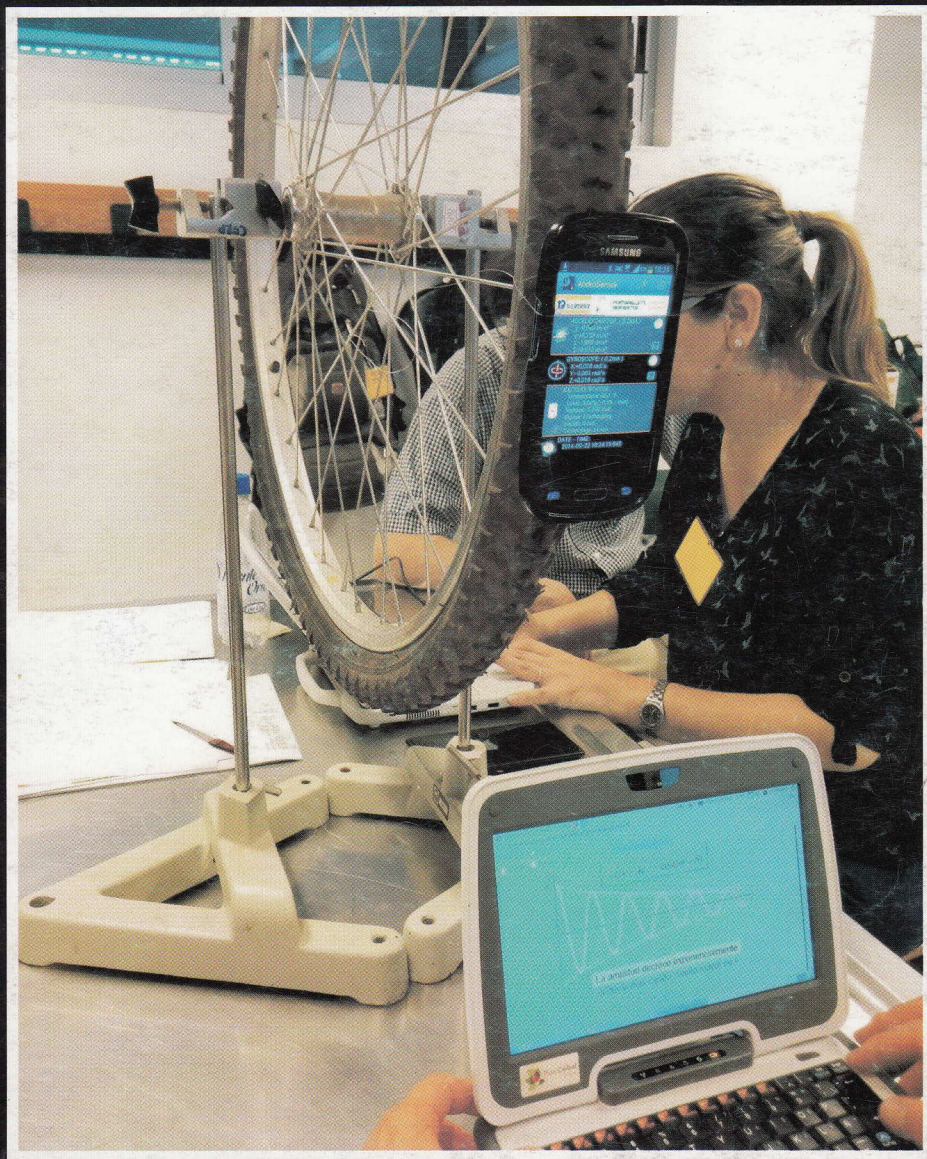


# EDUCACIÓN en FÍSICA

ISSN: 0797-9045

Revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay





# EDUCACIÓN EN FÍSICA

Volumen 8, Nº 4

Diciembre, 2014

Depósito Legal: 299222/14

## Redactor Responsable:

Gustavo González  
revistaapfu@gmail.com

## Consejo de Redacción:

Pablo García  
Alejaro Villamil  
Ismael Nuñez

Educación en Física es una revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay, que se distribuye gratuitamente entre sus socios.

## Comisión Directiva de la APFU:

Eduardo Bonda, *Presidente*  
Gustavo González, *Vicepresidente*  
Marco Pereira, *Secretario*  
Verónica Laluz, *Tesorera*  
Leonardo Machín, *Vocal*

## Dirección de la Revista:

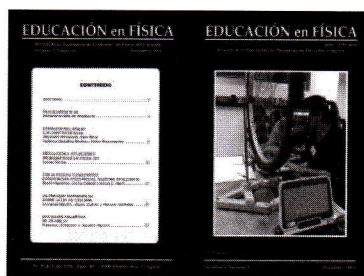
Av. 18 de Julio 1559 - Apto. 401  
Montevideo CP 11200  
Telefax: (+598) 2400 1258  
E-mail: revistaapfu@gmail.com  
apfu@adinet.com.uy

## Publica:

Ediciones IDEAS | Mercedes 1786  
11200 Montevideo-Uruguay  
Telefax: (+598) 2408 6985  
E-mail: edideas@adinet.com.uy

## M.E.C.:

Ed. amparada por Decreto 218/996



Portada

Queridos amigos, al fin nuevamente estamos desde esta editorial. Nos costó mucho esta vuelta por múltiples razones, entre otras: los cambios inherentes a la nueva Comisión Directiva, la escasez de material para publicar, lo vertiginoso de estos tiempos. De todas maneras no pretendemos con ellas ninguna justificación, sino tomar impulso y expresarles nuestra alegría por este primer número desde que comenzamos esta gestión.

Como podrán apreciar hubo cambios en la Redacción Responsable y en el Consejo de Redacción, quienes serán los encargados de poner en funcionamiento nuevamente en forma más fluida la llegada a ustedes por este medio, dándole su impronta personal y con el cometido que esta publicación sea una instancia más para compartir experiencias didácticas, prácticas de laboratorio, investigaciones docentes, información, etc.

En estos últimos tiempos hemos recibido más trabajos que están siendo arbitrados. Tenemos la esperanza que en el primer semestre del año próximo se publicará un nuevo número de la revista.

Es así que agradecemos a todos los que en forma desinteresada y honoraria, comparten su tiempo y su trabajo con todos nosotros, en particular a aquellos socios que nos han precedido en esta labor con nuestra revista, al nuevo Consejo de Redacción y a los autores de los artículos, sin los cuales esta publicación carecería de sentido, y una vez más, alentamos a quienes tengan algún trabajo que deseen publicar y compartir con sus colegas de física, bienvenidos sean.

Por lo expuesto, celebramos la aparición de este número y estamos esperanzados que a partir de ahora todo marchará en forma más fluida y eficiente.

Hasta el próximo número.

*Comisión Directiva*

## PROCEDIMIENTO DE PRESENTACIÓN DE TRABAJOS

Pueden ser enviadas para su publicación contribuciones de diverso tipo: trabajos teóricos, experimentales, de investigación, tesis, comentarios de libros, trabajos de divulgación, sugerencias de sitios web, comentarios acerca de software, y todo artículo que promueva el conocimiento o la enseñanza de la Física o ciencias afines.

Estos trabajos pueden enviarse impresos, manuscritos o en formato electrónico; por e-mail a:

*apfu@adinet.com.uy o  
revistaapfu@gmail.com,*

por fax al (598) 2400 1258 o entregados personalmente en el local de la Asociación (18 de Julio 1559 Ap. 401), días hábiles de 14.00 hs a 19.00 hs) en forma impresa o manuscrita y si es en formato electrónico en CD, DVD, pendrive o tarjetas de memoria, debidamente identificados adjuntando una carta donde se solicita la consideración de dicho trabajo para ser publicado en la Revista.

En general no se aceptarán trabajos que ya hayan sido publicados, o estén en consideración de publicación, por otro medio diferente a esta Revista. El Comité Editorial podrá autorizar en forma extraordinaria la publicación de trabajos que se encuentren en la condición anterior atendiendo a razones justificadas.

Cuando la APFU recibe un trabajo para su publicación en la Revista asume que:

- a. dicho trabajo puede ser publicado en la Revista o reimpresso, como considere el Comité Editorial. Para su publicación en un medio diferente a la Revista, la

APFU requerirá de los autores una autorización por escrito.

- b. es responsabilidad de los autores, no de la APFU, requerir el consentimiento de otras partes para la publicación de dicho material, como ser por ejemplo, imágenes o datos previamente publicados.

El contenido de los trabajos publicados en la Revista es de exclusiva responsabilidad de sus autores, no de la APFU.

Los trabajos serán arbitrados en forma anónima y del informe de este arbitraje se decidirá si dicho trabajo amerita ser publicado en la Revista. Durante el arbitraje se puede requerir de los autores explicar, ampliar o reescribir parte de su trabajo. Si se decide publicar el trabajo, se les comunicará a los autores la aceptación y se les pedirá, si aún no lo han hecho, de enviar el trabajo en formato electrónico y con el estilo fijado por la Revista.

Para su publicación los trabajos deben ser presentados en formato electrónico susceptible de ser editado. Se prefiere que lo hagan en formato .doc ya sea con MS Word, Writer de OpenOffice.org u otro editor de texto que genere archivos .doc. No se aceptan en formato .pdf. Los trabajos deben ser enviados a la Asociación o la Revista en la forma descripta anteriormente.

Estos trabajos deben ser presentados siguiendo ciertas reglas de estilo. Estas reglas, así como una plantilla que sirve de modelo para la presentación de los trabajos, se encuentran en la página web de la APFU:

*<http://apfu.fisica.edu.uy>*



# EXPANSIÓN DEL AIRE EN LOS COHETES DE AGUA

**Alejandro Romanelli<sup>1</sup> - Italo Bove,  
Federico González Medina y Víctor Micenmacher<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>alejo@fing.edu.uy

<sup>2</sup>Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República  
C.C. 30, C.P. 11300, Montevideo, Uruguay

## Resumen

Estudiamos la termodinámica de los cohetes de agua en la fase de empuje, tomando en cuenta la expansión del aire con vapor de agua, la condensación del vapor y su correspondiente calor latente.

Construimos un experimento que es una botella estacionaria con la que verificamos que la expansión del gas en la botella es bien descrita por un proceso politrópico  $PV^\beta = \text{constante}$ , donde el parámetro  $\beta$  depende del estado inicial. Encontramos una expresión analítica para  $\beta$  que sólo depende de las condiciones termodinámicas iniciales y que concuerda muy bien con los resultados experimentales.

## Introducción

En alguna de las premiaciones de las Olimpiadas de Física y en la competencia anual que se realiza en el Observatorio Astronómico los Molinos nos hemos divertido lanzando cohetes de agua, juguetes cuya dinámica involucra muchos conceptos físicos. A raíz de estos festejos, durante la preparación de los problemas para las Olimpiadas de Física de año 2010 surgió la discusión entre el equipo de estudiantes y docentes que estaban trabajando sobre cuál era el modelo más adecuado para tratar la expansión del aire dentro de la botella en los cohetes de agua. Ese fue el puntapié inicial que dio lugar al siguiente trabajo de investigación que está siendo publicado en la revista norteamericana *American Journal of Physics*, del cual presentamos aquí una versión en español.

El cohete de agua es un juguete muy popular en el hemisferio norte donde ya tiene varias décadas [1]. Su versión más barata puede ser construida con una botella de plástico llena con agua y aire presurizado obtenido con un inflador de bicicleta. Cuando la botella es abierta el aire presurizado empuja el agua hacia fuera y esto causa un incremento en la cantidad de movimiento de la botella. La eyección del agua entrega a la botella el empuje necesario para moverla por varios metros, ver Ref. [2].

El lanzamiento de cohetes de agua es usado en los laboratorios de nuestros cursos de bachillerato y facultades de Ingeniería y Ciencias para ilustrar varios conceptos físicos, entre ellos: a) Leyes de Newton, b) conservación de la cantidad de movimiento, c) teorema del trabajo y la energía, d) ecuación de Bernoulli, e) conservación de la masa, f) expansión de un

gas ideal. Donde en este último punto surge la necesidad de clarificar si la expansión del gas en el cohete es adiabática o isoterma.

La descripción teórica del cohete de agua no es trivial y en general, es necesario adoptar ciertas premisas para obtener una amigable caricatura de la realidad. En particular la única fuente de energía del cohete es la expansión del aire que es en general modelado por aire seco [2-5] en un proceso isoterma o adiabático. Las predicciones cualitativas de estos enfoques teóricos dan resultados razonables, sin embargo sus descripciones cuantitativas son incorrectas, mostrando lo inadecuado de alguna de las hipótesis de los modelos. En particular, observando el lanzamiento de un cohete de agua, se ve que al finalizar la expulsión del agua aparece una eyección de niebla adicional. Por lo tanto, es evidente que en la expansión se produce una mezcla de aire seco, vapor de agua y agua condensada (neblina). En la referencia [6] el autor profundiza en este punto y construye una relación presión volumen asumiendo que la entropía de toda la mezcla se conserva durante la expansión y adicionalmente muestra que la solución de dicha ecuación puede ser aproximada por un proceso politrópico.

En el presente trabajo, hemos desarrollado una experiencia para elucidar la naturaleza de la expansión del gas en el cohete de agua. También presentamos un breve desarrollo teórico que proporciona una expresión analítica para el parámetro que caracteriza los procesos politrópicos.

## Caracterización de los procesos politrópicos

Presentamos aquí un breve repaso de las principales características de los procesos politrópicos para un gas ideal. Un proceso politrópico es un proceso cuasiestático llevado a cabo de tal manera que el calor específico  $c$  permanece constante durante toda la evolución del sistema [7-9]. Por lo tanto el intercambio de calor cuando la temperatura cambia es

$$\frac{dQ}{dT} = Nc; \quad (1)$$

donde  $Q$  es el calor absorbido por el sistema,  $T$  es la temperatura y  $N$  es el número de moles del sistema. En el proceso la presión y el volumen pueden cambiar arbitrariamente, por lo tanto, el calor específico depende también del proceso. Por supuesto, los procesos en los que se mantienen la presión o el volumen constante son politrópicos con calores específicos  $c_p$  o  $c_v$  respectivamente. En una evolución adiabática no hay intercambio de calor entre el sistema y el medio ambiente, por lo que es un proceso politrópico con  $c = 0$ . En el otro extremo, la evolución isotérmica se caracteriza por una temperatura constante por lo que puede ser pensado como un proceso politrópico con calor específico infinito.

Empezando con la primera ley de la termodinámica,

$$dU = dQ - PdV, \quad (2)$$

donde  $P$  es la presión,  $V$  el volumen y

$$dU = c_v NdT, \quad (3)$$



es la energía interna de un gas ideal, junto con la Eq.(1) tenemos la ecuación diferencial para

$$(c_v - c)NdT + PdV = 0. \quad (4)$$

De Eq.(4) y usando la ecuación de estado de un gas ideal, es fácil probar que el proceso politrópico satisface

$$PV^\beta = \text{constante} \quad (5)$$

donde

$$\beta = \frac{c_p - c}{c_v - c} \quad (6)$$

Usualmente los libros de texto de termodinámica definen un proceso politrópico a través de la Ec.(5) (por ejemplo [10]). Sin embargo hemos comenzado con la Ec.(1) debido a que proporciona un vínculo directo entre el calor y los cambios de temperatura. En particular para un proceso adiabático  $c = 0$  y  $\beta = \gamma$  donde

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \quad (7)$$

( $\gamma=1.4$  para el aire seco a temperatura ambiente). Para un proceso isotérmico  $c = \infty$  y  $\beta = 1$ , para un proceso isobárico  $c = c_p$  y  $\beta = 0$  y para un proceso isovolumétrico  $c = c_v$  y  $\beta = \infty$ . Usando Eq.(6), el calor específico como función de  $\beta$  es

$$c = \frac{c_p - \beta c_v}{1 - \beta} \quad (8)$$

Es bien sabido que sistemas en equilibrio termodinámico deben satisfacer  $c_v > 0$ , de otra forma la segunda ley de la termodinámica es contradictoria [11-13]. Sin embargo el valor de  $c$  depende del proceso y en principio no tiene restricción [14]. Para procesos politrópicos cuando  $1 < \beta < \gamma$  entonces  $c < 0$ , como se ve en la Eq.(8). Ejemplos de tales casos se encuentran en modelos mas realistas de: (a) el proceso de expansión en un motor a combustión interna, (b) el proceso de compresión en un refrigerador a compresión de vapor. En el sistema experimental tratado en este artículo  $c < 0$  significa que durante la expansión del gas el calor es absorbido ( $dQ > 0$ ) aún cuando la temperatura desciende ( $dT < 0$ ) debido a que el gas realiza una cantidad de trabajo mayor que la cantidad de calor absorbido.

Finalmente, el calor total  $Q$  intercambiado entre el gas ideal y el medio ambiente puede ser calculado integrando la Eq.(1)

$$Q = cN(T - T_0) \quad (9)$$

donde  $T$  es la temperatura del gas y  $T_0$  es su temperatura inicial.

## Intercambio de calor y condensación de vapor

Ahora nos ocuparemos de nuestra situación experimental. En lo que sigue vamos a utilizar el término "gas" para referirnos a la mezcla de: aire seco y vapor de agua (aire húmedo). A medida que el agua es expulsada de la botella el gas se expande y se enfría. En este proceso la humedad relativa aumenta hasta la saturación y algo de vapor condensa. La cantidad de vapor de agua condensado al final del experimento dependerá de la humedad relativa inicial en el gas y de sus temperaturas inicial y final. Queremos estimar la masa y el calor involucrado en esta condensación. El número de moles de vapor de agua  $N_v$  puede calcularse utilizando [15]

$$N_v = \frac{P_v V}{RT} \quad (10)$$

donde  $P_v$  es la presión parcial del vapor a la temperatura  $T$  y  $R$  es la constante de los gases ideales. La presión parcial del vapor se determina por la ecuación  $P_v = \varepsilon e_w$  donde  $\varepsilon \in [0,1]$  es la humedad relativa fraccionaria y  $e_w$  es la presión de saturación que depende únicamente de la temperatura y puede obtenerse a partir de una tabla de vapor. El aire a presión es generado por el compresor a una temperatura superior a la ambiente y debido a su enfriamiento resulta la saturación del aire con el vapor en el interior del sistema. Entonces, asumiremos que estamos trabajando con  $\varepsilon = 1$  durante todo el curso de los experimentos, con lo cual  $P_v = e_w$ , y esto implica la maximización de la energía entregada por la transición de fase vapor-líquido. En nuestro caso, la temperatura inicial es  $T_0 = 292 \text{ K}$  y la presión parcial inicial es  $P_{v0} = 2,3 \text{ kPa}$  (este último valor es tomado de una tabla de vapor).

Con el fin de obtener una comprensión más completa sobre el intercambio de calor debido a la condensación del vapor comenzamos con la ecuación de Clapeyron-Clausius [15] para la transición de fase líquido-vapor

$$\frac{de_w}{dT} = \frac{L_v}{R} \frac{e_w}{T^2} \quad (11)$$

donde  $L_v$  es el calor latente, que para nuestros propósitos puede considerarse constante,  $L_v = 2500 \text{ kJ/kg}$ . La solución de la Eq.(11) da la presión parcial  $P_v = \varepsilon e_w$  como función de la temperatura  $T$

$$P_v = P_{v0} e^{\frac{L_v}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} \quad (12)$$

donde la constante fue ajustada para que  $P_v(T_0) = P_{v0}$ .

La condensación produce un cambio de la masa de vapor en el gas. Los moles de vapor condensado se pueden calcular usando la Eq.(10) dos veces, es decir

$$\Delta N_v = \frac{P_{v0} V_0}{RT_0} - \frac{P_v V}{RT} \quad (13)$$



Es fácil demostrar que un proceso politrópico está caracterizado también por la ecuación  $P T^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ . Entonces

$$\frac{V}{T} = \frac{NR}{P} = \frac{NR}{P_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \quad (14)$$

Para obtener el calor latente de condensación

$$Q = \Delta N_v L_v \quad (15)$$

sustituimos Eqs.(12,14) en la Eq.(13), esto es

$$Q = \frac{NP_{v0} L_v}{P_0} \left[ 1 - e^{\frac{L_v}{T_0 R} (1 - \frac{T_0}{T})} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right] \quad (16)$$

Uno puede preguntarse si hay otra forma de intercambio de calor entre el sistema y el medio ambiente. Como se verá, nuestro experimento dura menos de un segundo, entonces es una suposición razonable que el calor intercambiado entre el sistema y su entorno a través de las paredes, es despreciable. Esto implica que la energía entregada por la transición de fase vapor-líquido es la principal fuente de calor para el sistema.

Es importante señalar que, debido a la condensación del vapor de agua, el número de moles  $N$  en el gas no es una constante. Sin embargo, las Ecs.(9, 16) se obtuvieron usando la ley de los gases perfectos tanto para el gas como para el vapor de agua. Estas ecuaciones presuponen que  $N$  y  $N_v$  son constantes. Por lo tanto, las Ecs.(9,16) se pueden utilizar sólo si la variación de moles es insignificante. El número relativo de moles condensados  $\Delta N_v / N_v$  se puede estimar usando las Ecs.(10,13)

$$\frac{\Delta N_v}{N_v} = 1 - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} e^{\frac{L_v}{R} (\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T})} \quad (17)$$

Si se estima que la temperatura final del sistema es  $T = T_0 - 10 \text{ K}$ , entonces la Eq.(17) nos da el valor  $\Delta N_v / N_v \approx 0,6$ . La variación relativa total de moléculas del gas es

$$\frac{\Delta N_v}{N_v} = \frac{\Delta N_v}{N_v} \frac{N_v}{N} = \frac{P_{v0}}{P_0} \frac{\Delta N_v}{N_v} \approx 10^{-3} \quad (18)$$

donde usamos la ecuación de gas ideal tanto para el gas como para el vapor de agua. Por lo tanto, tenemos la siguiente situación,  $\Delta N_v / N$  es insignificante sin embargo  $\Delta N_v / N_v$  no lo es. En la deducción de la Eq.(16), hemos utilizado la Eq.(10) que es correcta sólo si  $\Delta N_v / N_v \approx 0$ . Entonces, es evidente que la Eq.(16) sólo es correcta en el límite de  $T \rightarrow T_0$ . Por lo tanto, debemos sustituir la Eq.(16) por la siguiente ecuación diferencial exacta

$$dQ = cN dT \quad (19)$$

donde

$$c = \frac{L_v}{T_0} \frac{P_{v0}}{P_0} \left( \frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{L_v}{RT_0} \right) \quad (20)$$

La Eq. (19) se obtiene reemplazando  $T = T_0 + dT$  en la Eq.(16) y tomando el término de primer orden en  $dT$ .

## Cálculo del exponente politrópico $\beta$

En esta sección calculamos el exponente  $\beta$  usando los resultados previos. La Eq.(8) es una expresión general del calor específico politrópico  $c$  para un gas ideal. Por otro lado la Eq.(20) relaciona el calor específico  $c$  con las condiciones iniciales y los parámetros del sistema. Igualando los lados derechos de las Eqs. (8) y (20) tenemos

$$\frac{C_p - \beta c_v}{1 - \beta} = \frac{L_v}{T_0} \frac{P_{v0}}{P_0} \left( \frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{L_v}{RT_0} \right) \quad (21)$$

Esta última ecuación da una expresión teórica para obtener el parámetro  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{c_p + R (L_v / RT_0)^2 (P_{v0} / P_0)}{c_v + R (L_v / RT_0)^2 (P_{v0} / P_0) - (L_v / T_0) (P_{v0} / P_0)} \quad (22)$$

Este es el principal resultado teórico de este documento y de su análisis se

concluye: (a) Si  $P_{v0} \approx 0$  o  $L_v \approx 0$  entonces  $\beta \approx \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , esto significa que el proceso es adiabático para el aire seco. (b)  $\beta$  depende solamente de las condiciones termodinámicas iniciales del gas, esto es inesperado: otros parámetros tales como el tiempo de eyección de agua no aparecen. La Tab. I muestra los valores teóricos de  $\beta$  Eq.(22), que llamamos  $\tilde{\beta}$ , calculados para nuestras condiciones experimentales iniciales.

También es interesante señalar que el modelo desarrollado en la Ref.[6] también predice que el exponente  $\beta$  depende en gran medida de la humedad relativa inicial y propone la función empírica

$$\beta = 1.15 + (1.4 - 1.15) \exp(-36P_{v0} / P_0) \quad (23)$$

La Fig. 1 muestra  $\beta$  (Eqs.(22,23)) como una función de la fracción molar inicial de vapor ( $P_{v0}=P_0$ ), y en ella también se presentan nuestros resultados experimentales.

## Resultados experimentales

Se ha diseñado un dispositivo experimental con el fin de elucidar la naturaleza de la expansión del gas en el cohete de agua y del intercambio de calor entre el gas y su medio ambiente. El cohete de agua se fija en el marco del laboratorio y entonces se mide la dependencia temporal de la presión y el volumen del gas en expansión. La botella estacionaria se repre-



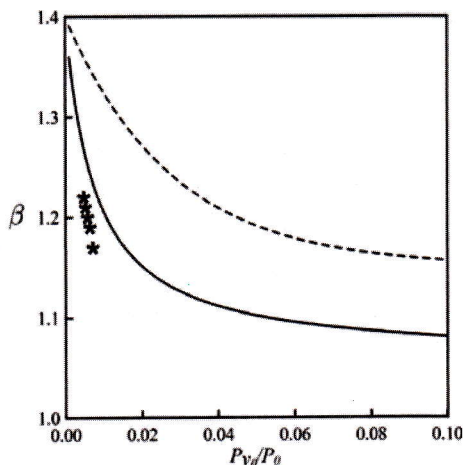


FIG. 1: El exponente politrópico en función de la fracción molar inicial. Las estrellas indican los valores experimentales de  $\beta$ . La línea continua es nuestro cálculo teórico dado por la Eq. (22) y la línea punteada es la función dada por la Eq. (23).

senta en la Fig. 2. La botella es un cilindro de acrílico transparente de diámetro interior 5.40 cm, espesor de pared 0.30 cm y longitud 1 m, que se mantiene en posición vertical. Las tapas superior e inferior son de aluminio. La superior tiene una válvula del neumático y un manómetro (WIKA EN 837-1) que trabaja entre 0 y 4 bar. La cubierta inferior tiene una forma cónica con una pendiente de  $30^\circ$  con una canilla de 0.5" que permite llenar y evacuar el agua de la botella. La botella ha sido construida en nuestro taller mecánico. El dispositivo es bastante simple y el experimento no es peligroso para el rango de presiones utilizadas en este trabajo, por lo que es apropiado para los estudiantes de pregrado. En una experiencia típica, la botella se llena con aproximadamente  $1400 \text{ cm}^3$  de agua y el resto con el

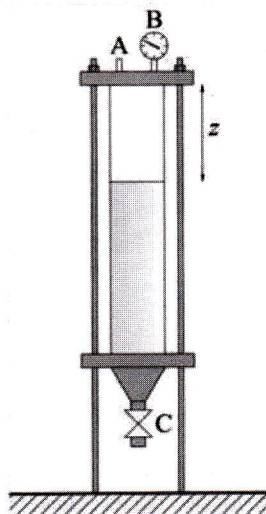


FIG. 2: La botella estacionaria, (A) es una válvula de neumático, (B) es un manómetro de presión, (C) es una canilla,  $z$  es la altura de la columna de gas situado encima de la columna de agua.

| $P_0/P_A$ | $\beta$ | $\tilde{\beta}$ | $c/R$ | $t(s)$ |
|-----------|---------|-----------------|-------|--------|
| 4.8       | 1.22    | 1.27            | -2.0  | 0.64   |
| 4.4       | 1.21    | 1.26            | -2.2  | 0.66   |
| 4.0       | 1.20    | 1.25            | -2.6  | 0.75   |
| 3.6       | 1.19    | 1.24            | -2.7  | 0.75   |
| 3.2       | 1.17    | 1.23            | -3.5  | 0.88   |

TABLA I: Resultados para diferentes presiones iniciales  $P_0$ , con  $P_A$  la presión atmosférica,  $\beta$  el valor experimental del exponente politrópico,  $\tilde{\beta}$  el valor teórico del exponente politrópico,  $c$  el calor específico calculado a partir de  $\beta$ ,  $R$  la constante de los gases ideales y  $t$  el tiempo de eyección.

aire. Se coloca en posición vertical con la canilla cerrada. El aire comprimido se introduce a través de la válvula y luego se abre la canilla. El nivel del agua y la presión del gas es filmada con una cámara PIXELINK PL-B776F. El vídeo se obtuvo a 50 fotogramas por segundo, con un tiempo de exposición de 10 ms por marco. La expulsión de agua de la botella duró entre 0.64 s a 0.88 s, dependiendo de la presión inicial, véase Tab. I. Finalmente la película se procesa manualmente para obtener la presión y el volumen del gas en función del tiempo.

La Fig. 3 muestra los resultados para cinco conjuntos de datos experimentales de presión y volumen. Cada conjunto corresponde a diferentes presiones iniciales con el mismo volumen inicial; para cada presión inicial el experimento fue repetido cinco veces y todos los datos se incorporan en la misma figura. Los datos se ajustan a una ley de potencia  $PV^\beta = constante$ . Los valores de  $\beta$ , la pendiente de las rectas de la figura, se presentan en la Tab. I. Los valores experimentales de los exponentes politrópicos  $\beta$  están en muy buena correspondencia con los valores teóricos  $\tilde{\beta}$  dados por la Eq.(22).

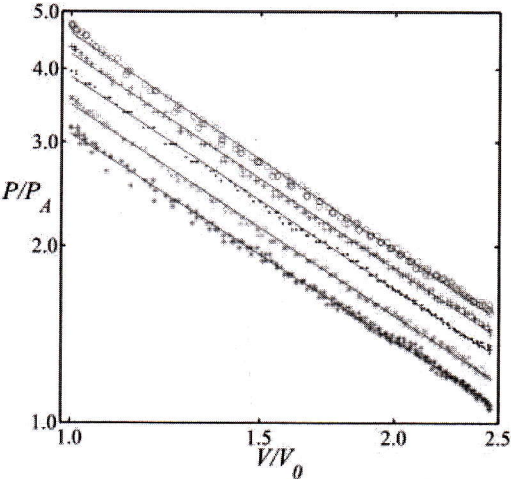


FIG. 3: Presión adimensional en función del volumen adimensional del gas en una escala log-log. Los datos experimentales para los cinco experimentos se muestran junto a su ajuste con líneas rectas. Los valores iniciales de la presión adimensional son, de arriba a abajo, 4.8, 4.4, 4.0, 3.6, 3.2, con  $P_A$  la presión atmosférica y  $V_0 = 928.6\text{ cm}^3$  el volumen inicial del gas.



## Discusión y conclusiones

El tiempo normal de eyección del agua en nuestros experimentos es del orden de 0.7 s y el tiempo de eyección típico en el cohete de agua normal es de 0.1 s [2]. La diferencia en las tasas de eyección debe ser analizada: (i) La principal diferencia geométrica entre las botellas está relacionada con los picos. La sección del pico de la botella estacionaria ( $a_1$ ) y de la botella de refresco estándar ( $a_2 = 3.46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ) están relacionados por  $a_1 = 0.4 a_2$ . Una pico pequeño era necesario con el fin de acomodar la capacidad de nuestra cámara de vídeo. (ii) Otra diferencia entre los experimentos es la densidad aparente. En la botella estacionaria el agua sólo se somete al peso. En el cohete de agua, la masa de agua se somete a una fuerza que es la suma de su peso, más una fuerza ficticia debido a la aceleración del cohete. El campo gravitatorio aparente es varias veces más grande que el campo gravitatorio de la Tierra. (iii) Finalmente, nuestro cálculo teórico muestra que no depende de la velocidad de salida del agua, ya que sólo depende de las condiciones termodinámicas iniciales del gas. Adicionalmente está de acuerdo con nuestros valores experimentales. Entonces podemos concluir que, en las mismas condiciones termodinámicas iniciales, la expansión del gas en el cohete de agua es la misma que la expansión del gas en la botella estacionaria.

En resumen, hemos presentado por primera vez un estudio experimental de la expansión de aire en el cohete de agua, utilizando una botella estacionaria. Se muestra que la expansión de aire sigue un proceso politrópico del tipo  $PV^\beta = \text{constante}$  donde  $\beta$  es un valor medio con ligera dependencia en las condiciones iniciales. Además se obtuvo una expresión analítica para el exponente politrópico que concuerda razonablemente con los valores experimentales. Este exponente teórico sólo depende de las condiciones termodinámicas iniciales de los gases y es adecuado para estudiar la expansión del aire en el cohete de agua común. Finalmente concluimos que la condensación del vapor de agua es la fuente principal de calor para el proceso de expansión de los gases en el cohete de agua.

*A.R. y I.B. agradecen las estimulantes discusiones con Gastón Ayubí y Pedro Curto, y el apoyo del PEDECIBA y ANII. F.G.M. agradece el apoyo de la beca PEDECIBA de iniciación científica.*

## Bibliografía

- [1] L.G. Johnson, B. M. D'Andrade Buchholtz "Pressurized air/water rocket and launcher" United States Patent, Nº 5415153, (1995).
- [2] D. Kagan, L. Buchholtz, and L. Klein, "Soda-bottle water rockets", Phys. Teach. **33**, 150 (1995).
- [3] J.M. Prusa, "Hydrodynamics of a Water Rocket" Siam Rev., **42**, 719 (2000).
- [4] R.B. Perotti, E.B. Marigorta, J.F. Francos, and M.G. Vega, "Theoretical and experimental analysis of the physics of water rockets", Eur. J. Phys., **31**, 1131 (2010).
- [5] R.B. Perotti, E.B. Marigorta, K.A. Díaz and J. Fernández Oro, "Experimental evaluation of the drag coefficient of water rockets by a simple free-fall test", Eur. J. Phys., **30**, 1039, (2009).

- [6] C.J. Gommers, "A more thorough analysis of water rockets: Moist adiabats, transient flows and inertial forces in a soda bottle" *Am. J. Phys.*, 78, 236 (2010).
- [7] G.P. Horedt, "Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields", Kluwer Academic Publishers, London (2004).
- [8] E. Mañné, "Termodinámica", Montevideo (1974).
- [9] S. Chandrasekhar, "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover, New York (1967).
- [10] S.R. Turns, "Thermodynamics: Concepts and Applications", Cambridge University Press, (2006).
- [11] L. Landau y E. M. Lifshits, "Física estadística," Reverté (1988).
- [12] D. Lynden-Bell, and R.M. Lynden-Bell, "On the negative specific heat paradox," *Mon. Not. R. astr. Soc.* (1977) **181** 405-419 (1977).
- [13] D. Lynden-Bell, "Negative Specific Heat in Astronomy, Physics and Chemistry," *arxiv:cond-mat/9812172v1* (1998).
- [14] By Yong Zhu, "Large-Scale Inhomogeneous Thermodynamics and Application for Atmospheric Energetics", Cambridge Int Science Publishing (2003).
- [15] G. J. Van Wylen, and R. E. Sonntag, "Fundamentals of classical thermodynamics" John Wiley and sons, 6 New York (1990); "Fundamentos de termodinámica", Limusa (1967).



# RESOLUCIÓN A SITUACIONES PROBLEMÁTICAS EN FÍSICA (IV)

Ismael Núñez

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería Udelar; inunez@fing.edu.uy

## ¿Violación del fenómeno de la reflexión total?

### Posibles explicaciones

Existe más de una posible explicación de la aparente violación del fenómeno de reflexión total mostrado en el experimento anterior.

- 1) Si la superficie tiene defectos de fabricación, presentará irregularidades que hacen que el ángulo de incidencia desde el interior del prisma sea menor que el ángulo crítico en algunas zonas. No obstante, en este caso en particular la calidad óptica de la superficie del prisma de Dove

está indicada con desviaciones del plano menores a  $\frac{1}{8}\lambda$  por pulgada.

Esto la hace una superficie «de precisión» y esta causa de «scattering» de la luz puede considerarse, al menos, como dudosa.

- 2) Otra causa posible para la aparición de luz en el exterior sobre la superficie donde debía de haber reflexión total interna, es la llamada *reflexión total interna frustrada* (RTIF) [1],[2]. Este fenómeno consiste en la aplicación de una solución más rigurosa del fenómeno de refracción.

El número de onda  $k_0$  de propagación de la luz en el medio donde el índice de refracción es  $n_0$  está dado por

$$k_0 = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0y}^2} \quad (4)$$

Donde hemos tomado el eje  $x$  paralelo a la superficie de interface en la figura (1) del planteo del problema (*página 54 de la Revista volumen 8, N° 3*) hacia la derecha y el eje  $y$  normal a ella hacia arriba. En función del ángulo de refracción  $\theta_0$  tenemos que

$$k_{0x} = k_0 \sin \theta_0, \quad k_{0y} = k_0 \cos \theta_0 \quad (5)$$

Según la ley (1), el ángulo de refracción en el aire ( $n_0 = 1$ ) está dado por

$$\sin \theta_0 = n \sin \theta \quad (6)$$

Entonces la componente  $k_{0y}$  puede escribirse como

$$k_{0y} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} \quad (7)$$

Para ángulos de incidencia  $\theta$  mayores que el ángulo crítico  $\theta_c$  para la reflexión total, la componente resulta imaginaria en (7). Esto es

$$k_{0y} = j k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} = j \beta \quad (8)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$ .

Este resultado tiene un significado físico. Al expresar la onda de propagación en forma exponencial, como  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ , resulta que la componente compleja del número de onda dada en (8) arroja un resultado exponencial real y de atenuación. Esto es

$$e^{ik_y y} = e^{-\beta y} \quad (9)$$

Este resultado significa que, aunque el campo electromagnético se extinga luego de algunas longitudes de onda, *siempre* hay una penetración al segundo medio en los casos de reflexión total, aún cuando la superficie de separación sea «perfectamente plana».

La pregunta que subsiste ahora es la siguiente: ¿cómo llega la luz al receptor de la cámara de fotos en la figura 5 del planteo del problema (*página 56 de la Revista volumen 8, N° 3*), si se supone que esta penetración del vidrio al aire se extiende solamente algunas longitudes de onda?

### Respuesta:

Si estuviésemos en el vacío y no en el aire, efectivamente no debería llegar luz a la cámara o al ojo del observador distante. Pero la existencia del medio material (el aire) permite que sus electrones sean excitados por este campo evanescente y generen luz en el segundo medio (este fenómeno se llama *scattering*).

<sup>1</sup> E. Hecht - A. Zajac, Óptica. Fondo Educativo Interamericano S.A. 1977.

<sup>2</sup> W. Döring, Introducción a la física teórica, Tomo III, Óptica. E. Uthea México. 1965



# CON LA FÍSICA A TODAS PARTES: EXPERIENCIAS UTILIZANDO EL TELÉFONO INTELIGENTE

**Martín Monteiro<sup>1</sup> - Cecilia Cabeza<sup>2</sup> - Arturo C. Martí<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Universidad ORT Uruguay; fisica.martin@gmail.com

<sup>2,3</sup> Instituto de Física, Facultad de ciencias Universidad de la República,  
Uruguay; marti@fisica.edu.uy

## Resumen

En este trabajo se proponen un conjunto de experiencias de Física orientadas a enseñanza media y primeros años de la enseñanza superior que se realizan gracias al empleo de teléfonos inteligentes. Estos dispositivos de uso sumamente extendido en todo el mundo suelen contar con un conjunto de sensores: aceleración, rotación, sonido, luminosidad, proximidad, campo magnético, entre otros, que los transforman en versátiles instrumentos de medida. Los campos de la Física que abarcan estas experiencias son muy amplios, destacándose mecánica, electromagnetismo, oscilaciones, ondas y óptica. El empleo de dispositivos familiares a los estudiantes permite acortar la brecha entre la Ciencia como un objeto abstracto de estudio reservado para unos pocos y la Ciencia como una apasionante aventura presente en todos los aspectos de la vida.

## 1. El uso de los teléfonos inteligentes como instrumento de medida.

El uso de teléfonos inteligentes y otros dispositivos similares se ha extendido vertiginosamente en los últimos años en todo el mundo. Esta revolución impacto también en los laboratorios donde diversas experiencias se ven facilitadas por el uso de los sensores con que habitualmente cuentan estos dispositivos. Recientemente, en varios artículos [1-14], el empleo de teléfonos inteligentes ha sido propuesto en varias experiencias que abarcan temáticas de mecánica, electromagnetismo, óptica, oscilaciones y ondas entre otras.

Varios de los trabajos citados anteriormente se centran en experiencias de mecánica, medida de la aceleración gravitatoria, energía elástica, péndulos simple, físico, elástico y de torsión. En un trabajo muy reciente [9], se estudia el momento angular de una pequeña mesa giratoria rotando en un plano horizontal. En el transcurso de la experiencia reportada, se colocan repentinamente masas a diferentes distancias del centro de rotación y se consideran las variaciones en el momento angular y en la energía cinética. Un paso adelante en el aprovechamiento de estos dispositivos se presenta con la posibilidad de usar simultáneamente los sensores de aceleración y rotación midiendo dos coordenadas generalizadas independientes como

proponen los autores de este trabajo en la referencia [10]. Esta medida simultánea, permite, en el caso relativamente más sencillo de sistemas con un grado de libertad, la obtención de dos coordenadas independientes y de esta forma obtener trayectorias en el espacio de fases.

Las experiencias relacionadas con oscilaciones y ondas también pueden ser implementadas mediante el teléfono inteligente. En este campo se han propuesto experiencias sobre efecto Doppler y velocidad del sonido. El electromagnetismo no queda excluido, por ejemplo se pueden usar los sensores de campo magnético para estudiar el campo generado en un solenoide. También es posible convertir el teléfono inteligente en un pequeño osciloscopio usando la aplicación adecuada. En este caso en particular debemos tomar precauciones de no introducir tensiones superiores a las permitidas para evitar *quemar* el celular. Otro interesante experimento propuesto en la Ref. [11] refiere la composición y visión de los colores.

Un **sensor** es un dispositivo capaz de medir una variable física o química y transformarla en una variable eléctrica. Los sensores presentes en los teléfonos inteligentes pueden ser de muy diversa naturaleza. Dado que la definición de sensor es muy general podemos pensar incluso el micrófono o la cámara digital como una clase particular de sensor. Una lista de los sensores más comunes y útiles para nuestros propósitos incluye a:

- sensor de aceleración
- sensor de rotación o giroscopio
- micrófono
- sensor de campo magnético
- sensor de luz ambiente
- sensor de proximidad,

pero existen otros como ser sensores de humedad, temperatura o presión.

Diversos programas o aplicaciones permiten registrar los valores medidos por los sensores. En particular podemos mencionar *Androsensor* [15], otras posibilidades disponibles son Sensor Kinetics, Z-Device Test. Habitualmente los sensores miden todas las componentes de las magnitudes vectoriales según los 3 ejes,  $x, y, z$  orientados como si estuvieran *dibujados* sobre la pantalla del celular. Una vez registrados los datos es posible descargarlos en una computadora y analizarlos utilizando un programa apropiado.

## 2. Algunas experiencias

En esta sección se reportan algunas experiencias que pueden ser realizadas usando la metodología expuesta. La lista no es exhaustiva pues pensamos que dentro de las temáticas exploradas la gran mayoría de las experiencias puede ser adaptada al uso de teléfonos inteligentes. Como recursos bibliográficos destacamos la columna que aparece mensualmente en la revista *The Physics Teacher* denominada *iPhysLab*. También se han publicado artículos relacionados con teléfono inteligentes en el *American Journal of Physics* y en el *European Journal of Physics* entre otras revistas.

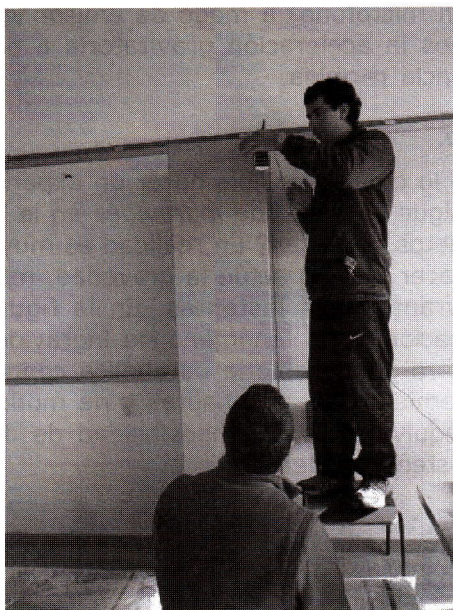
### 2.1 Determinación de la aceleración de la gravedad.

El sensor de aceleración o acelerómetro es uno de los de mayor utilidad en los experimentos de mecánica [1-2,7-8]. En líneas generales podemos de-



cir que un sensor de aceleración es una masa montada sobre un sistema de resortes tales que si la masa se acelera en una dirección uno de los resortes se comprime. A partir de la variación en la longitud del resorte, luego de su calibración, se puede determinar la aceleración. Estrictamente estos sensores no miden aceleración sino fuerzas. En la practica, los teléfonos inteligentes usan sistemas más sofisticados basados en cerámicas piezoeléctricas o capacitores variables.

Para determinar la aceleración de la gravedad, una posibilidad sencilla es dejar caer el celular como se ilustra en la figura 1 (asegurándonos que cae sobre una superficie lo suficientemente blanda para que no se rompa) y registrar la aceleración segun el eje vertical. Luego a partir de las medidas del sensor en función del tiempo puede determinar el tiempo de caída y el valor correspondiente de aceleración.



*Fig. 1. Lanzamiento del celular en la experiencia de caída libre.*

## 2.2 Efecto Doppler

El efecto Doppler recibe su nombre de Christian Andreas Doppler quien demostró en 1842 que cuando un observador en reposo recibe una señal acústica proveniente de una fuente en movimiento la frecuencia de la señal recibida es diferente de la frecuencia de las ondas emitidas por el emisor. Este corrimiento en frecuencia depende de la velocidad relativa entre el emisor y el receptor.

Este fenómeno puede ser estudiado usando el teléfono inteligente [1]. Comenzamos por registrar la señal emitida por una fuente de sonido de frecuencia conocida que se encuentra en movimiento respecto a un observador en reposo. La fuente de sonido puede ser un segundo teléfono inteligente sobre una plataforma giratoria, o un juguete, una bicicleta o cualquier otro medio de transporte. El efecto Doppler se puede analizar también

sin necesidad de bajar los datos del celular, por ejemplo con un espectrograma como el que hace la App AndroSpectro. De esta forma se puede visualizar en forma directa sobre la pantalla del celular la variación de frecuencia en función del tiempo, por ejemplo la señal de una fuente de frecuencia pura que se encuentra girando.

Otra alternativa es bajar los datos del celular a una computadora y analizar las señales obtenidas utilizando el programa *audacity* u otro similar disponible en internet. En forma complementaria se puede registrar con la cámara digital el movimiento de la fuente de sonido, calcular su velocidad y compararla con los resultados obtenidos a partir del corrimiento Doppler en la frecuencia.

También es posible estimar la aceleración gravitatoria mediante un estudio del efecto Doppler [1]. Para ello, utilizamos dos celulares (o un celular y una computadora con micrófono) a modo de emisor y receptor respectivamente, y estimaremos la aceleración gravitatoria a partir del corrimiento Doppler de la frecuencia recibida.

### 2.3. Gravedad cero.

¡Si, aunque usted no lo crea es posible hacer un experimento con *gravedad cero*! ¿Cómo se consigue el efecto de *ingravidez* en la Tierra? ¿Cómo hacemos para que los objetos *no pesen*? En realidad es muy fácil si aplicamos la física. No vamos a hacer que no actúe la gravedad, más bien haremos que el peso sea nulo durante unos instantes. En la figura 2 se muestra un ejemplo de esta situación. Este fenómeno de ingravidez se puede relacionar con los vuelos zero-g (trayectoria parabólica controlada) que se organizan para el entrenamiento de astronautas y de modo un poco más físico con el principio de equivalencia, la imposibilidad de diferenciar un campo gravitatorio de un sistema acelerado.



Fig. 2. Voluntario a punto de saltar al vacío provisto de un celular.



Es realmente llamativo poder vincular un concepto tan abstracto con un aparato cotidiano. Con este objetivo es posible dejar caer desde una cierta altura una masa unida a un resorte. La masa justamente puede ser el teléfono celular. Otra alternativa es lanzar el celular en trayectoria parabólica y verificar que efectivamente los tres sensores de aceleración dan prácticamente cero durante todo el vuelo. En este caso las medidas resultan algo más ruidosas y se detecta una cierta aceleración debido al giro del celular durante el vuelo.

## 2.4 Masas y resortes.

La constante elástica de un resorte se puede obtener fácilmente utilizando el teléfono inteligente. Un método sera utilizando el acelerómetro del celular y la segunda ley de Newton, el otro método sera utilizando un video y la relación Impulso-Momento [4-5]. Dentro de esta temática cabe mencionar el estudio de osciladores acoplados con y sin amortiguamiento [12-14] estudiados tanto con sensores de aceleración como con sensores de luz ambiente.

## 2.5 Movimiento circular

En esta experiencia se estudia el movimiento circular de un objeto. Para ello se utiliza el "teléfono inteligente" como cuerpo y se registrara el movimiento utilizando los sensores del acelerómetro [6] y del giroscopio [10] (figura 3).



*Fig. 3. Plataforma giratoria para el estudio del movimiento circular.*

Con los datos registrados se puede calcular la velocidad angular, el periodo del movimiento, la aceleración centrípeta y la variación del ángulo en función del tiempo. En esta practica se verifica la relación lineal entre la velocidad tangencial y la velocidad angular. También es factible trabajar en las relaciones de conservación del momento angular y de la energía cinética [9].

## 2.6 Péndulo simple

En esta experiencia se estudia la dependencia del periodo de oscilación de un péndulo en relación a diferentes parámetros que pueden ser modificados, como la amplitud inicial de las oscilaciones o el largo del hilo [3]. Se puede realizar la experiencia al menos por dos procedimientos diferentes.

En un caso, se utilizara la cámara y se analizaran los resultados analizando el video. En una segunda instancia, se medirá directamente con el uso de los sensores de rotación y aceleración de un celular.

## 2.7 El péndulo físico

Un sistema físico paradigmático como es el péndulo físico se estudia usando los sensores de aceleración y rotación disponibles en los teléfonos inteligentes (*smart-phones*) y en otros dispositivos como *Ipads*, o *tablets* [10]. En nuestra experiencia un teléfono inteligente se fija en la parte exterior de una rueda de bicicleta y se pone en movimiento tanto en régimen de rotación (dando vueltas completas en una dirección) como de oscilación ya sea de pequeños o de grandes ángulos. Los montajes experimentales se indican en las figuras 4 y 5.

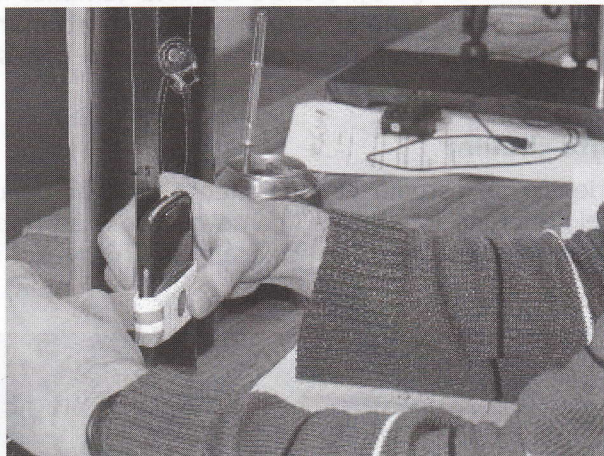


Fig. 4. Montaje experimental para el estudio del péndulo físico.

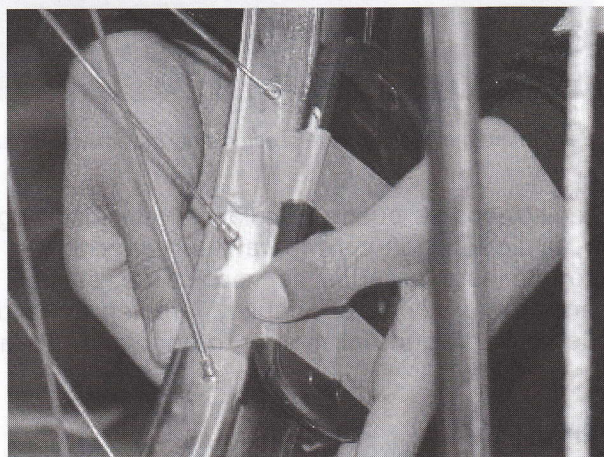


Fig. 5. Alternativa de montaje experimental para el péndulo físico.

Gracias a los sensores se obtienen medidas de aceleración y velocidad angular según diferentes ejes solidarios con el teléfono. El uso simultáneo



de estos sensores permite además obtener trayectorias en el espacio de fases y visualizar las diferentes características del movimiento.

## 2.8 Péndulo de torsión.

El péndulo de torsión consiste en un hilo o alambre de sección recta circular suspendido verticalmente, con su extremo superior fijo y de cuyo extremo inferior se cuelga una barra u otro cuerpo con un cierto momento de inercia. En la figura 6 se muestra el montaje experimental correspondiente. Se estudia, por ejemplo, la dependencia del periodo de oscilación del péndulo de torsión con el momento de inercia de la barra.

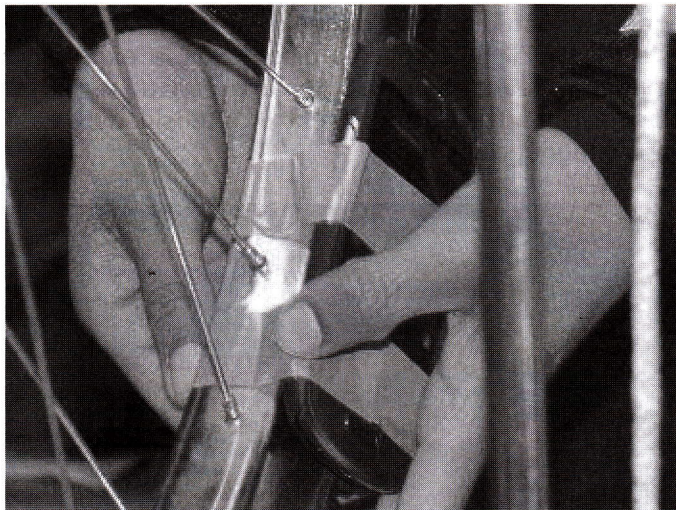


Fig. 6. Péndulo de torsión sujeto al celular.

## 2.9 Péndulo elástico

El péndulo elástico consiste en una masa sujeta a un resorte que se puede mover en un plano vertical. Un estudio muy preliminar fue presentado en la Ref. [4]. Este sistema es más complicado que los propuestos anteriormente pues tiene 2 grados de libertad (en otras palabras se precisan dos coordenadas para describir la configuración del sistema). Sus ecuaciones de movimiento no son fáciles de resolver pues es un ejemplo de sistema *no integrable*. Es decir, no es posible encontrar en general las soluciones generales a las ecuaciones de movimiento (también conocidas como leyes horarias). La dinámica del sistema para valores suficientemente grandes de la energía es *caótica*, es decir presenta sensibilidad a las condiciones iniciales (trayectorias con condiciones iniciales arbitrariamente próximas divergen exponencialmente).

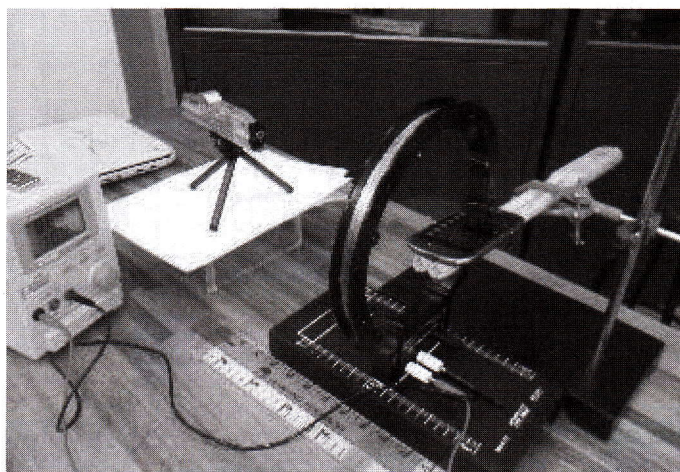
## 2.10 Velocidad del sonido

La velocidad de sonido es la velocidad a la que se propaga una onda mecánica en un medio elástico dado. En esta experiencia calcularemos la velocidad del sonido en el aire. Una primera alternativa medir con un celular puesto en la boca de un tubo largo. Se produce un pulso sonoro y en la

grabación queda registrada el pulso original y su reflejo. Para estimar la velocidad del sonido, utilizaremos dos micrófonos en un cable "Y" (dos interfaces mono en un conector estereo) y una computadora. En este montaje no se pueden utilizar los celulares por no tener entrada estereo de micrófono.

### 2.11 Campo Magnético

Es posible estudiar como varia el campo magnético generado por una espira al variar distintos parámetros del sistema. El campo magnético puede ser generado de dos formas: o bien con cargas eléctricas en movimiento o bien con un campo eléctrico variable. En la practica es más sencillo generar los campos magnéticos estudiados por medio de corrientes eléctricas como se muestra en la figura 7. En este caso diseñamos la experiencia para poder medir el campo magnético generado por una espira, variamos los distintos parámetros del sistema (distancia al centro, intensidad) y estudiamos como varia el campo magnético.



*Fig. 7. Montaje experimental de la medida de campo magnético. Se aprecia el celular y las bobinas que producen el campo magnético.*

## 3. Perspectivas

Para concluir señalamos que el uso de sensores con que cuentan los teléfonos inteligentes permiten un espectro amplio de medidas aplicables en distintas experiencias de mecánica, óptica, ondas y electromagnetismo. Las posibles experiencias se multiplican si consideramos el uso simultáneo de sensores de aceleración y rotación que permite, entre otros aspectos, acceder al espacio de fases y obtener una representación física de un concepto abstracto. El potencial de estos dispositivos se multiplica si observamos que el precio de estos aparatos disminuye y su disponibilidad crece exponencialmente en todo el mundo. El uso de dispositivos habituales para los estudiantes secundarios, como son los teléfonos inteligentes, contribuye a reducir la brecha en la Ciencia como practica inaccesible que se desarrolla en ámbitos especiales y la experiencia cotidiana.



## Agradecimientos

Agradecemos a todos los participantes del *Taller de Física con el teléfono inteligente* y en particular a los profesores Christian Suárez, Robert Álvez, Vilma Patrón, Gerardo Rodríguez, Ivanna Chagas y Fátima Leiva por su asistencia en algunas de las fotos presentadas. Este taller se realizó gracias al apoyo financiero y logístico de PROCENCIA (PEDECIBA-ANEP) y de la Escuela Los Arrayanes de CETP-UTU (ANEP).

## Referencias:

- [1] Patrik Vogt, Jochen Kuhn, and Sebastian Muller, «Experiments Using Cell Phones in Physics Classroom Education: The Computer-Aided  $g$  Determination,» *Phys. Teach.* 49, 383 (Sept. 2011).
- [2] Patrik Vogt and Jochen Kuhn, «Analyzing free fall with a smartphone acceleration sensor,» *Phys. Teach.* 50, 182 (March 2012).
- [3] Patrik Vogt and Jochen Kuhn, «Analyzing simple pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor,» *Phys. Teach.* 50, 439-440 (Oct. 2012).
- [4] Jochen Kuhn and Patrik Vogt, «Analyzing spring pendulum phenomena with a smart-phone acceleration sensor,» *Phys. Teach.* 50, 504 (Nov. 2012).
- [5] Jefferson W. Streepey «Using iPads to illustrate the impulse-momentum relationship,» *Phys. Teach.* 51, 54 (Jan. 2013).
- [6] Patrik Vogt and Jochen Kuhn «Analyzing radial acceleration with a smartphone acceleration sensor,» *Phys. Teach.* 51, 182 (March 2013).
- [7] Jochen Kuhn, Patrik Vogt, «Smartphones as experimental tools: Different methods to determine the gravitational acceleration in classroom physics by using everyday devices,» *Eur. J. Phys. Educ.* 4, 16 (2013).
- [8] Joel Chevrier, Laya Madani, Simon Ledenmat, and Ahmad Bsiesy, «Teaching classical mechanics using smartphones,» *Phys. Teach.* 51, 376 (Sept. 2013).
- [9] Asif Shakur and Taylor Sinatra, "Angular momentum," *Phys. Teach.* 51, 564 (Dic. 2013).
- [10] M. Monteiro, C. Cabeza, A.C. Marti, "Exploring phase space using simultaneously smartphone acceleration and rotation sensors," *Phys. Teach.* (enviado 2014).
- [11] L.J. Thoms, G. Colicchia, and R. Girwidz, "Color reproduction with a smart-phone," *Phys. Teach.* 51, 440 (Oct. 2013).
- [12] J.C. Castro-Palacio, L. Velazquez-Abad, M.H. Gimenez, and J.A. Monsoriu, "Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations," *Am. J. Phys.* 81, 472 (2013).

- [13] J.A. Sans, F.J. Manjon, A.L.J. Pereira, J.A.Gomez-Tejedor, and J.A. Monsoriu, "Oscillations studied with the smartphone ambient light sensor," Eur. J. Phys. 34, 1349 (2013).
- [14] J.C. Castro-Palacio, L. Velazquez-Abad, F. Gimenez, and J.A. Monsoriu, "A quantitative analysis of coupled oscillations using accelerometer sensors," Eur. J. Phys. 34, 737 (2013).
- [15] Diversas aplicaciones disponibles en el sitio de Google Play, <http://play.google.com>, permiten registrar los valores medidos por los sensores en funcion del tiempo.



# UN ENFOQUE EXPERIMENTAL SOBRE LA LEY DE COULOMB

**Leonardo Machín<sup>1</sup> - Álvaro Suárez<sup>2</sup> - Marcelo Vachetta<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Profesor de Física en el liceo 26, Docente de Laboratorio en el IPA, Montevideo, Uruguay; leonardomachin2012@gmail.com

<sup>2</sup> Profesor de Física en el liceo 34, Docente de Laboratorio en el IPA, Montevideo, Uruguay; alsua@outlook.com

<sup>3</sup> Profesor de Física en el liceo 26, Docente de Laboratorio en el IPA, Montevideo, Uruguay; mvachetta@gmail.com

## Resumen:

En este artículo se presenta un método experimental para el estudio de cómo varía la fuerza eléctrica entre dos objetos cargados con la distancia que los separa. Para abordar el mismo se utilizó un software de análisis de video. El ajuste de los datos obtenidos a partir de la filmación es acorde con lo esperado.

## Palabras clave:

Ley de Coulomb, Fuerza eléctrica, Análisis de video.

## A) Introducción

La humanidad está familiarizada con los fenómenos electrostáticos desde hace más de dos milenios, sin embargo los primeros registros sistemáticos conocidos datan del siglo XVIII. En ese siglo es que el científico francés Charles Coulomb a partir de análisis cuantitativos realizados con una balanza de torsión, describió matemáticamente la interacción eléctrica entre cuerpos cargados. A la expresión descrita se la denominó más tarde Ley de Coulomb.

La ley tiene un marco de aplicación inmenso, tanto en la física como en la química. La misma describe las interacciones eléctricas entre los electrones de un átomo y su núcleo, así como las fuerzas que mantienen unidos los átomos para formar moléculas y las que mantienen unidas las moléculas entre sí.

Cabe mencionar que Henry Cavendish también encontró la ley que describe la fuerza entre partículas cargadas, aunque sus trabajos fueron publicados cien años después de su muerte [1].

Cuando presentamos la ley de Coulomb en el aula, usualmente recurrimos a actividades experimentales de índole cualitativo, mostrando fenómenos de repulsión y atracción entre cuerpos cargados, dejando en general de lado actividades experimentales cuantitativas entre otras razones debido al elevado porcentaje de humedad ambiente<sup>1</sup>. Esto obliga a realizar las medidas

<sup>1</sup> La rapidez con que se descargan los cuerpos depende fuertemente del porcentaje de humedad relativa del aire, el cual tiene un porcentaje medio anual en Uruguay de entre el 70 y 75%. (Dato extraído de la página web de la dirección nacional de meteorología) <http://www.meteorologia.gub.uy/index.php/caracteristicas-climaticas>)

lo «suficientemente rápido» para minimizar el efecto de la variación de la carga con el tiempo.

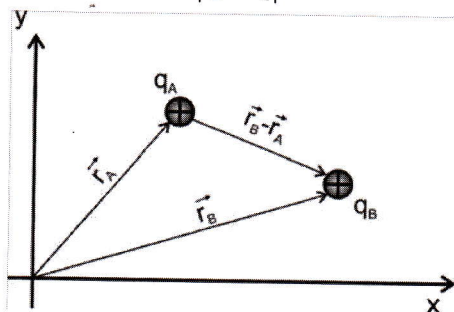
Una forma de reducir el problema de la descarga es realizar las medidas a partir de una filmación digital del experimento. En este artículo presentamos un diseño experimental basado en esta idea.

## B) Modelo teórico

La ley de Coulomb plantea que la fuerza eléctrica que ejerce una partícula cargada sobre otra es directamente proporcional al producto de las cargas de cada partícula e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de la fuerza está dada por la recta que une las partículas y su sentido depende del signo del producto de las cargas. A esta relación se la denomina *Ley de Coulomb*.

Si las partículas cargadas se encuentran en el vacío, la Ley de Coulomb se puede expresar vectorialmente de la forma:

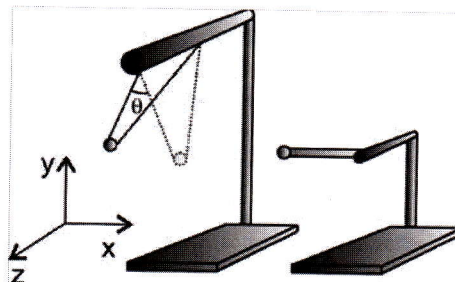
$$\vec{F}_{A/B} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^3} \quad (1)$$



1. Fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas.

Tal como está formulada sólo es válida cuando la partícula cargada que ejerce la fuerza se encuentra en reposo. En base a mediciones en física nuclear, a distancias del orden de  $10^{-15} m$  se sabe que la ley de Coulomb mantiene su validez. Sin embargo, para distancias menores, esta ley parecería no cumplirse [2].

Consideremos un sistema como el de la figura 2, formado por dos pequeñas esferas con cargas de igual tipo, una de ellas fija en un soporte y la otra vinculada a dos hilos livianos y aislantes constituyendo un péndulo electrostático.



2. Diagrama del sistema descrito.



Debido a la repulsión eléctrica, el péndulo modifica su posición de equilibrio, desviándose un ángulo  $\theta$  respecto a la vertical. Para esta nueva posición, si asumimos que el ángulo es pequeño, podemos suponer que la fuerza eléctrica es horizontal. En estas condiciones se cumple que:

$$P = T_y \quad (2)$$

$$F_{el} = T_x \quad (3)$$

Donde  $T_x$  y  $T_y$  representan los módulos de las componentes horizontal y vertical de la tensión respectivamente,  $P$  el módulo de la fuerza Peso sobre el péndulo y  $F_{el}$  el de la fuerza eléctrica.

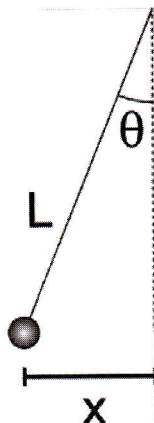
Las componentes de la tensión están dadas por:

$$T_y = T \cos \theta \quad (4)$$

$$T_x = T \sin \theta \quad (5)$$

Sustituyendo en (2) y (3). Y eliminando  $T$  obtenemos:

$$F_{el} = mg \tan \theta \quad (6)$$



3. Péndulo formando un ángulo  $\theta$  respecto a la vertical.

Por lo tanto, conociendo la masa de la esfera que constituye el péndulo y el ángulo del péndulo respecto a la vertical, podríamos determinar el valor de la fuerza electrostática.

La ecuación (6) podemos reescribirla en función de la posición  $x$  del péndulo y su largo  $L$  a partir de la definición de tangente. Teniendo en cuenta la misma, la expresión para la fuerza eléctrica sobre el péndulo en función de  $x$  toma la forma:

$$F_{el} = mg \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad (7)$$

### C) Método experimental

En este trabajo nos centraremos en el estudio experimental de la dependencia de la fuerza electrostática con la distancia entre los cuerpos cargados.

Para aumentar el tiempo de descarga de las esferas utilizadas, de forma de poder suponer que la cantidad de carga del sistema permanece constante, se realizó el experimento al mediodía de un día soleado, en el cual el porcentaje de humedad era inferior al 50%.

Para la realización de la práctica utilizamos:

- Dos bolitas pequeñas de igual radio  $R$ , una de ellas de acero macizo y la otra de papel de aluminio arrugado. La esfera maciza se fija a un soporte mientras que la otra cuya masa es de  $m = (0,29 \pm 0,01)g$  se cuelga de dos hilos conformando un péndulo de longitud  $L = (0,710 \pm 0,001) m$ .
- Un generador electrostático (en nuestro caso utilizamos un pequeño generador de Van de Graaff, pero puede utilizarse una máquina de Wimshurst o incluso, en días muy secos, una barra de acrílico frotada en piel de «gato»).
- Cámara digital y computadora con software de análisis de video (Tracker o Logger Pro).

Para determinar correctamente la posición de equilibrio del péndulo, comenzamos a filmar con las esferas neutras y el péndulo en reposo.

Cargamos la esfera maciza poniéndola en contacto con el generador electrostático. Posteriormente cargamos la esfera del péndulo poniéndola en contacto con la maciza. Luego separamos ambas esferas y empezamos a acercar la maciza al péndulo de forma que éste se aleje a causa de la fuerza eléctrica de repulsión.

Al dejar en reposo la esfera maciza, el péndulo oscila ligeramente alrededor de la nueva posición de equilibrio, esperamos un tiempo a que la amplitud de la oscilación disminuya hasta valores que permitan medir su posición con suficiente precisión y luego alejamos la esfera maciza aproximadamente 1 cm. Es importante tener en cuenta que, para minimizar el efecto de la descarga gradual por contacto con el aire, el experimento debe realizarse en un tiempo corto. Este procedimiento se repitió 8 veces lo que insumió un total de 60 segundos, desde la primera hasta la última medida realizada.

## **D) Consideraciones sobre la distancia entre los objetos**

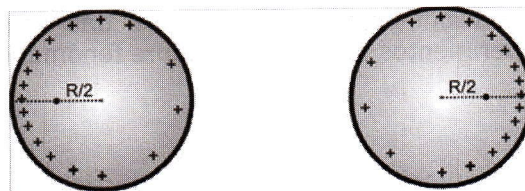
Teniendo en cuenta que el radio  $R$  de las esferas no es despreciable respecto a la distancia entre ellas, y que sus cargas no se encuentran uniformemente distribuidas, no corresponde considerar a la carga como si estuviera ubicada en el centro de las esferas. Por este motivo consideraremos a las esferas como si la carga de cada una estuviera acumulada en un punto más cercano a sus bordes al que llamamos «centro de carga».

Para cada esfera el centro de carga se ubica en algún lugar entre su centro y su borde más alejado de la otra esfera. Teniendo esto en cuenta es que decidimos ubicar el punto de referencia para medir la distancia entre las esferas en medio de este intervalo ( $R/2$  del centro de cada esfera).

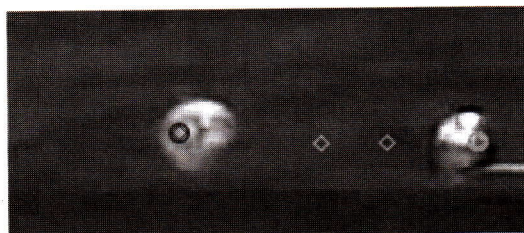
En la figura 5 se observa parte de la secuencia de puntos marcados con el software Tracker entre los centros de carga de las esferas.

El video del experimento se puede ver en: <http://www.youtube.com/watch?v=CxiGML3nDmg&feature=youtu.be>





4. Representación de las posiciones de los centros de carga.

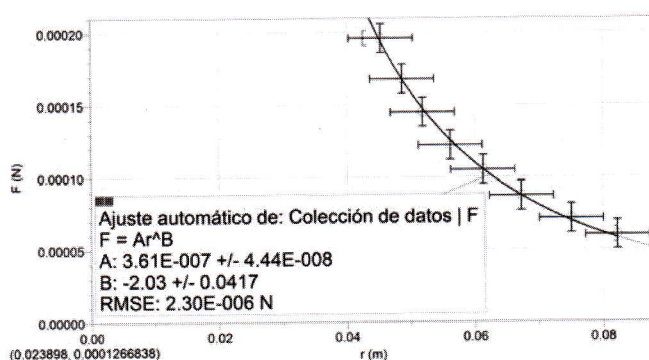


5. Posiciones de los centros de carga.

## E) Resultados experimentales

Para verificar que la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las mismas, se graficó fuerza eléctrica en función de la distancia entre los centros de carga. Dicho gráfico se puede observar en la figura 6. Posteriormente se ajustan los datos experimentales con una función potencial de la forma  $F = Ar^b$  obteniéndose para el coeficiente  $b$  el valor:

$$b = -2,03 \pm 0,04 \quad (8)$$



6. Gráfico de  $F$  en función de  $r$ .

## F) Conclusiones

Los resultados experimentales obtenidos para la fuerza eléctrica entre partículas cargadas se pueden considerar satisfactorios. La diferencia entre el valor obtenido experimentalmente y el esperado para la potencia de  $r$  es aproximadamente 1,5%. Este resultado nos permite inferir que el método experimental utilizado resultó adecuado.

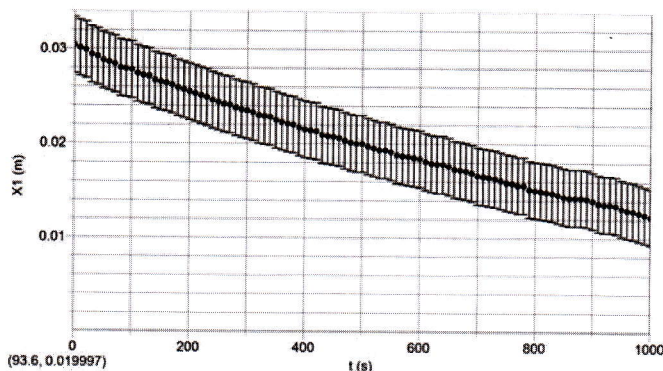
Creemos que las filmaciones digitales pueden ser una herramienta útil para la realización de experimentos cuantitativos sobre fenómenos electrostáticos.

## G) Apéndices

*G1. Análisis de cómo varía la carga de las partículas con el tiempo y estimación de la carga neta acumulada por cada esfera.*

Para definir cuál es el máximo intervalo de tiempo en el que se deben realizar las medidas del experimento, para que la variación de la fuerza eléctrica por efecto de la disminución de la carga eléctrica del sistema pueda despreciarse, estudiamos experimentalmente cómo varía la carga con el tiempo. Para ello cargamos las esferas colocando la maciza a una distancia fija de la esfera del péndulo. Posteriormente se comenzó a filmar el sistema hasta que el hilo del péndulo retorno a la vertical, es decir hasta que se descargaron ambas esferas.

A partir del análisis del video se determina la posición del centro de carga de la esfera del péndulo en función del tiempo y se grafican dichas magnitudes (ver figura 7).



7. Gráfico de la posición del centro de carga de la esfera del péndulo en función del tiempo.

Considerando a la esfera del péndulo en equilibrio, y partiendo de la ecuación 7 se determina que el producto de las cargas de las esferas en función de la posición  $x$  de la esfera del péndulo está dado por:

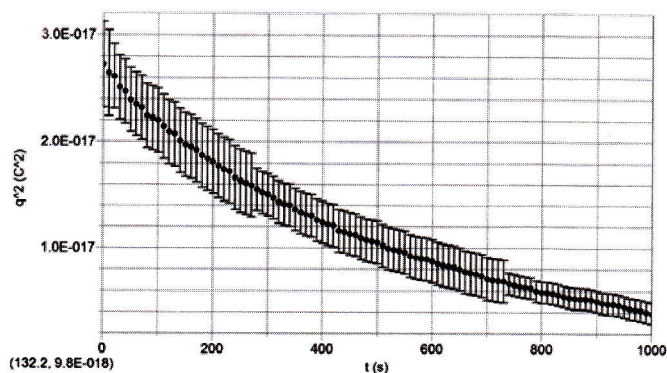
$$q_A q_B = \frac{4\pi\epsilon_0 mgr^2 x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad (9)$$

Como las dos esferas tienen igual radio, sus cargas iniciales son iguales, ya que la esfera del péndulo se cargo al entrar en contacto con la esfera maciza.

$$\text{Sea } q_A = q_B = q, \quad q^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 mgr^2 x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad (10)$$



Por lo tanto dados los valores de las posiciones de los centros de carga de cada esfera en función del tiempo y haciendo uso de la ecuación anterior se determina cómo varía  $q^2$  en función del tiempo y se grafican dichas magnitudes (ver figura 8).



8. Gráfico de  $q^2$  en función del tiempo.

Para obtener la función matemática que describa como varía el producto de las cargas de las esferas con el tiempo, se supuso que la rapidez con que se descarga cada esfera es proporcional a la carga de cada una, es decir:

$$\frac{dq}{dt} = -Bq \quad (10)$$

Siendo  $B$  una constante.

Resolviendo la ecuación diferencial se determina la carga en función del tiempo:

$$q(t) = q_0 e^{-Bt} \quad (11)$$

Siendo  $q^2$  la carga de la esfera en  $t = 0s$ .

El producto de las cargas de las esferas disminuye con el tiempo en la forma:

$$q^2(t) = q_0^2 e^{-2Bt} \quad (12)$$

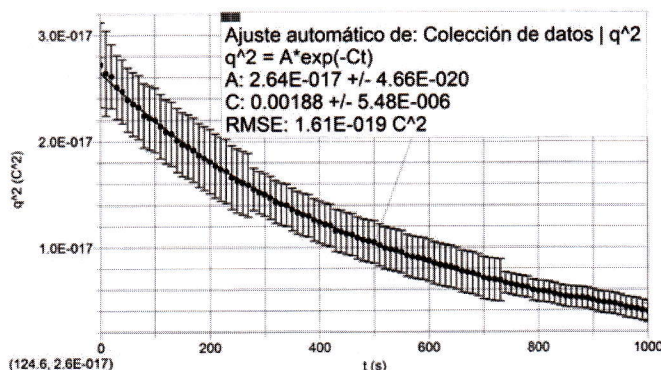
En la figura 9 se observa el gráfico del producto de las cargas en función del tiempo. Al ajustar el gráfico con una función de la forma  $Ae^{-ct}$ , e identificar términos se encuentra que:

$$\begin{aligned} 2B &= 0,00188 \\ q_0^2 &= 2,64 \times 10^{-17} C^2 \end{aligned}$$

Siendo el RMSE  $1,61 \times 10^{-19} C^2$ . (Ver figura 9)

Dado que el RMSE es dos órdenes de magnitud menor que los valores de  $q^2$ , podemos afirmar que el ajuste es satisfactorio, verificándose entonces la hipótesis acerca de la rapidez de descarga de las esferas.

A partir del valor obtenido para  $2B$  se determina la constante de tiempo  $\tau$  del sistema que está dada por  $(1/2B) = 532s$ .



9. Gráfico de  $q^2$  en función del tiempo ajustado con una función exponencial.

Para las condiciones en las que se realizó este experimento, es que dado el valor de  $\tau$ , se define arbitrariamente un intervalo de tiempo máximo que puede durar la realización de las medidas de la práctica sin tomar en cuenta el fenómeno de descarga en el análisis de los datos.

Se consideraron válidas aquellas medidas que se tomaron en un tiempo tal que  $q^2$  se reduce un 10%. Valor que para el experimento realizado es igual a  $t = \tau / 10$  que corresponde a 53,2s.

Por último cabe mencionar que a partir del análisis de la descarga de las esferas, asumiendo como válido el modelo de Coulomb, se puede estimar el orden de magnitud de la carga que se acumula en cada esfera, la cual es del orden de  $5nC$ .

## G2. Cálculo de incertidumbres

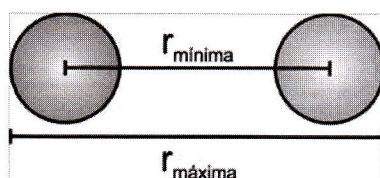
Se identificaron tres fuentes de incertidumbre asociadas con la posición del centro de carga de cada esfera así como de la distancia entre los mismos:

- La incertidumbre asociada con la determinación de la distancia entre dos puntos de los fotogramas utilizando la vara de calibración del software Tracker.
- La incertidumbre asociada a la posición del centro de carga, a partir del cálculo del valor medio de la misma mientras oscila la esfera entorno a la posición de equilibrio.
- La incertidumbre asociada con la posición del centro de carga de cada esfera, por efecto de la redistribución de las cargas como consecuencia del cambio de la distancia relativa entre las esferas.

Al determinar cada incertidumbre, se encontró que las dos primeras son un orden de magnitud menor que la asociada con la redistribución de las cargas, por lo que sólo se tomó en cuenta la última. Para cuantificar y acotar dicha incertidumbre se tomaron en cuenta las dos situaciones límites. Por un lado se consideró que la menor distancia posible que puede haber entre los centros de carga de las dos esferas, es aquella para la cual la distribución de carga de cada una es esférica, mientras que la mayor distancia



posible se da cuando la carga de cada esfera se acumula sobre los extremos de cada una.



10. Posiciones de los centros de carga.

De esta manera la incertidumbre absoluta de la distancia entre los centros de carga está dada por:

$$\delta r = a \quad (13)$$

Siendo  $a$  el radio de cada esfera (se desprecia la incertidumbre asociada a la medida del radio de cada esfera).

Mientras que la incertidumbre de la posición del centro de carga de cada esfera está dada por:

$$\delta x = a / 2 \quad (14)$$

Para determinar la incertidumbre de la fuerza eléctrica así como la del cuadrado de la carga eléctrica, se aplicó la expresión planteada por Salvador-Gil en referencia [3] para cada magnitud.

$$\delta F \leq \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L} \delta L\right)^2} \quad (15)$$

$$\delta q^2 \leq \sqrt{\left(\frac{\partial q^2}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial q^2}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial q^2}{\partial r} \delta r\right)^2} \quad (16)$$

Las incertidumbres en las medidas de

$m$ ,  $x_1$ ,  $L$  y  $r$  son  $\delta m = 1 \times 10^{-5} \text{ kg}$ ,  $\delta x_1 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\delta L = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\delta r = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

## H) Referencias

- [1] Gamow, George, Biografía de la Física, 2<sup>da</sup> edición, España, Castilla, 1962. Página 152.
- [2] Feynman, Richard, Lecciones de Física Tomo II, 1<sup>a</sup> edición USA, Fondo educativo interamericano, 1972. Sección 5-8.
- [3] Salvador-Gil, Física Recreativa, 1<sup>era</sup> edición, Argentina, Pearson Education, 2001. Página 24.

# LEVITACIÓN MAGNÉTICA DE UN ANILLO\*

**Francisco Echegorri<sup>1</sup> - Agustín Mazzini<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Profesor del IPA, semipresencial, CFE - <sup>2</sup> Estudiante del IPA

## Resumen

La levitación magnética del anillo de aluminio (llamado en la bibliografía anillo de Thomson en homenaje al físico norteamericano Elihu Thomson) es una fascinante demostración del electromagnetismo. La explicación más común de este efecto es aquella que indica que el campo magnético del solenoide tiene una polaridad idéntica a la del campo magnético generado por el anillo, produciéndose entonces, un efecto repulsivo entre ambos.

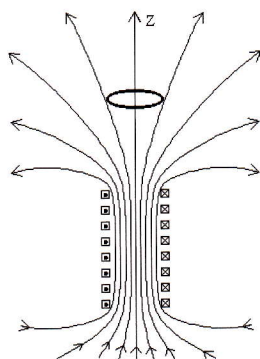
Esta explicación sin embargo es insuficiente ya que, como es posible demostrar, a partir de ella existiría sobre el anillo una fuerza tanto atractiva como repulsiva cuyo valor medio temporal sería nulo.

La explicación que presentamos aquí da cuenta del anillo como una pequeña bobina que posee así una autoinducción la que es responsable del desfase temporal de la corriente en el anillo con respecto al campo magnético producido en el primario, dando como resultado una fuerza media repulsiva.

## Palabras clave

Levitación magnética, Fuerza de Lorentz, Anillo de Thomson, Inducción Electromagnética, Ley de Faraday.

## Levitación magnética de un anillo de aluminio



*Se representa  
instantáneamente el sentido del  
campo acorde al sentido de la  
corriente por el solenoide*

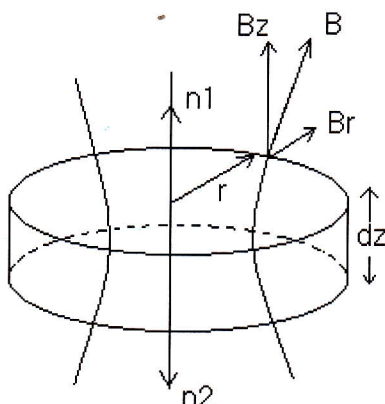
El objetivo del siguiente experimento es el estudio de la fuerza de Lorentz sobre un anillo de aluminio sometido a un campo magnético variable en el tiempo y en el espacio. Trataremos de dar una explicación cualitativa y cuantitativa de los fenómenos observados.

El dispositivo consiste en un solenoide con núcleo de hierro laminado conectado a una fuente de voltaje alterno y un anillo de aluminio colocado sobre el eje del solenoide con libertad de moverse solo en la dirección de dicho eje.

\* Trabajo presentado en el VII Encuentro Internacional de Educación en Física y XIV Encuentro Nacional de Profesores de Física del Uruguay en Trinidad, Flores, el 15 de setiembre de 2004.



## Fundamento teórico



Consideremos un pequeño cilindro de altura  $dz$  y radio  $r$ . La ley de Gauss para el magnetismo nos dice que el flujo total a través del cilindro es nulo. Sea  $\Phi(z)$  el flujo magnético a través una sección circular de radio  $r$  perpendicular al eje  $z$ .

El flujo total es:

$$\Phi(z + dz, t) - \Phi(z, t) + B_r(z, t)2\pi r dz = 0$$

Operando:

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} dz + B_r(z, t)2\pi r dz = 0$$

Luego obtenemos:

$$B_r(z, t) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} \quad (1)$$

Supongamos que medimos la fem inducida por el flujo magnético variable sobre una bobina exploradora con igual dimensión que el radio medio del anillo. Si la bobina exploradora tiene  $N_2$  espiras, la fem inducida sobre dicha espira es:

$$\varepsilon_{\text{bobina exploradora}} = -N_2 \frac{d\Phi(z, t)}{dt}$$

Supongamos que  $\Phi(z, t)$  viene dado por:

$$\Phi(z, t) = \Phi_0(z) \cos(\omega t) \quad (3)$$

Luego la fem inducida en la bobina exploradora es:

$$\varepsilon_{\text{bobina exploradora}} = N_2 \omega \Phi_0(z) \sin(\omega t) = \varepsilon_0(z) \sin(\omega t) \quad (4)$$

Luego:

$$\Phi_0(z) = \frac{\varepsilon_0(z)}{N_2 \omega} \quad (5)$$

Mediante la bobina exploradora medimos la amplitud de la fem inducida para una serie de valores de  $z$ , y mediante (5) podemos calcular  $\Phi_0(z)$ , para luego calcular la amplitud de la componente radial del campo magnético  $B_{0r}(z)$  a partir de (1).

Ajustamos los datos experimentales de  $\Phi_0(z)$  mediante una curva exponencial decreciente.

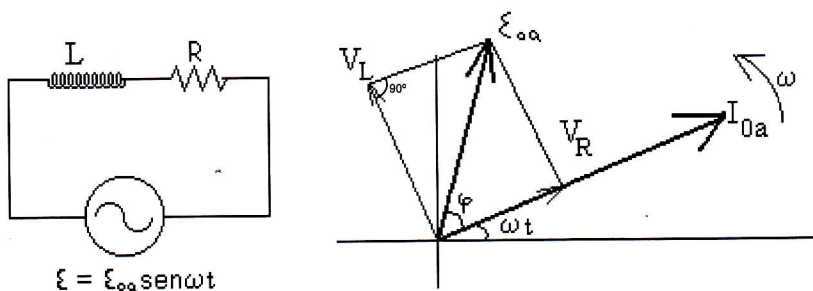
## Cálculo de la fuerza sobre el anillo

El flujo magnético sobre el anillo viene dado por (3) ya que las dimensiones de la bobina exploradora coinciden con la del anillo. La fem inducida sobre el anillo es de acuerdo a la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{anillo} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0(z) \text{sen}(\omega t) = \varepsilon_{0a} \text{sen}(\omega t) \quad (6)$$

con  $\varepsilon_{0a} = \omega \Phi_0(z)$

El anillo de aluminio posee resistencia R y autoinducción L, luego la corriente inducida sobre el mismo se puede calcular resolviendo el circuito equivalente de la figura.



La diferencia de potencial en los extremos de la autoinducción  $V_L$  está adelantado  $\pi/2$  respecto de la corriente que circula por ella; en cambio la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia R está en fase con la corriente.

La amplitud de la fem inducida en el anillo es entonces:

$$\varepsilon_{0a} = \sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)} I_{0a} \quad (7)$$

Luego:  $I_{0a} = \frac{\varepsilon_{0a}}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}}$

Además la corriente en el anillo presenta un retraso de fase  $\varphi$  con:

$$\text{sen} \varphi = \frac{L \omega}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \quad (8)$$

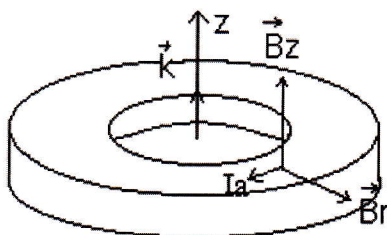
La corriente en el anillo en estado estacionario es entonces:

$$I_a = \frac{\varepsilon_{0a}}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

a partir de (6) obtenemos:



$$I_a = \frac{\omega \Phi_0(z)}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (9)$$



La fuerza de Lorentz sobre el anillo viene dada por:

$$\vec{F} = \oint I_a d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (10)$$

La componente respecto de la dirección del eje z del campo magnético no produce una fuerza neta ya que la integral se anula sobre todo el anillo (pues

da una componente de la fuerza en dirección radial); en cambio la componente radial  $B_r$  produce una fuerza en dirección del eje z.

$$\vec{F} = -I_a B_r 2\pi r \vec{k} \quad (11)$$

Sustituyendo a partir de (9) y suponiendo que  $B_r(z,t) = B_{0r}(z) \cos(\omega t)$  obtenemos:

$$\vec{F} = -\frac{\omega \Phi_0(z)}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \cos(\omega t) 2\pi r B_{0r}(z) \text{sen}(\omega t - \varphi) \vec{k}$$

Utilizando (1) llegamos a que la fuerza instantánea sobre el anillo viene dada por: (11)

$$\vec{F} = \Phi_0(z) \Phi'_0(z) \frac{\omega}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t - \varphi) \vec{k}$$

donde  $\Phi_0(z)$  es la amplitud del flujo magnético a través del anillo y  $\Phi'_0(z)$  es la derivada del flujo respecto de z.

El valor medio de la fuerza en un período se calcula a partir de:

$$\langle \vec{F} \rangle = \Phi_0(z) \Phi'_0(z) \frac{\omega}{\sqrt{(R^2 + L^2 \omega^2)}} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \text{sen}(\omega t - \varphi) \cos(\omega t) dt \vec{k} \quad (12)$$

La integral anterior viene dada por:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \text{sen}(\omega t - \varphi) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} [\text{sen}(-\varphi) + \text{sen}(2\omega t - \varphi)] dt = \frac{-\text{sen}(\varphi)}{2}$$

pues la integral de  $\text{sen}(2\omega t - \varphi)$  es nula en un intervalo igual al período.

Luego la fuerza media sobre el anillo es:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\Phi_0(z)\Phi'_0(z) \frac{\omega}{\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}} \frac{\text{sen}(\varphi)}{2} \quad (13)$$

A partir de (8) tenemos que:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\Phi_0(z)\Phi'_0(z) \frac{L\omega^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} \quad (14)$$

Supongamos que en principio la inducción magnética B en el núcleo de hierro es proporcional al campo magnético  $H = n I_{os} \cos(\omega t)$  (estamos en la parte lineal de la curva de histéresis magnética); luego la inducción magnética B va a ser también proporcional a  $I_{os}$ , donde  $I_{os}$  es la amplitud de la intensidad de la corriente en el solenoide.

Finalmente como el flujo magnético a través del anillo es proporcional a B, entonces es también proporcional a la amplitud de la corriente en el solenoide y la derivada respecto de z también.

En conclusión para intensidades de corriente en el solenoide en donde el núcleo de hierro se comporte en forma lineal, esto es que B sea proporcional a H, la fuerza media sobre el anillo es proporcional a la amplitud de la intensidad en el solenoide al cuadrado.

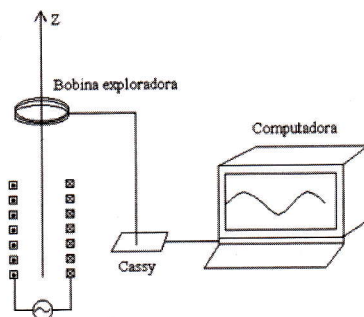
La dependencia de la fuerza con la frecuencia se puede ver a partir de (14); al principio crece de forma rápida con  $\omega$  para luego tender a aplanarse y por tanto ser aproximadamente independiente de  $\omega$  para frecuencias grandes.

## Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste en un solenoide de 300 espiras y 4.6 cm de alto con un núcleo de hierro laminado. El anillo de aluminio tiene una masa de 16.0 gr y dimensiones que se detallan más adelante.

Para medir el flujo magnético sobre el anillo construimos una espira de  $N_2=10$  vueltas de alambre de cobre y medimos la fem inducida en la misma para distintas alturas dejando fija la intensidad de corriente en el solenoide.

Mediante la Cassy adquirimos los datos y medimos la amplitud de la señal sinusoidal obtenida.



Se indica uno de los posibles sentidos de la corriente.



## Cuadros de valores

El siguiente cuadro de valores es la amplitud de la fem inducida para distintas alturas de la bobina exploradora para una intensidad del solenoide de 6.0 A.

| $z(10^{-3}\text{m})$ | $\varepsilon_{\text{ind}}(10^{-3}\text{V})$ | $\Phi_0 = \varepsilon / N_2 \omega (10^{-8}\text{weber})$ |
|----------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 0                    | 247                                         | 7862                                                      |
| 2.5                  | 226                                         | 7194                                                      |
| 5.0                  | 191                                         | 6080                                                      |
| 7.5                  | 158                                         | 5029                                                      |
| 10                   | 138                                         | 4393                                                      |
| 12.5                 | 119                                         | 3788                                                      |
| 15.0                 | 104                                         | 3310                                                      |
| 17.5                 | 91                                          | 2897                                                      |
| 20.0                 | 77                                          | 2451                                                      |
| 22.5                 | 69                                          | 2196                                                      |
| 25.0                 | 60                                          | 1910                                                      |
| 27.5                 | 54                                          | 1719                                                      |
| 30.0                 | 49                                          | 1560                                                      |

Ajustamos los datos experimentales mediante una curva exponencial obteniendo un coeficiente de correlación  $r = 0.998$  y una desviación  $s = 1.36 \times 10^{-6}$  weber.

La amplitud del flujo magnético y su derivada vienen dadas según el ajuste anterior por:

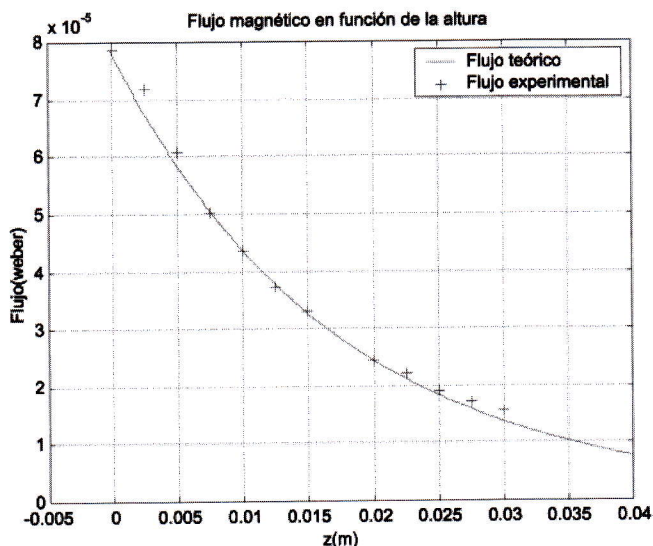
$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= 8 \times 10^{-5} \exp(-57.8 z) \text{ weber} \\ \Phi'_0(z) &= -4.6 \times 10^{-3} \exp(-57.8 z) \text{ volt}\end{aligned}\quad (15)$$

En el supuesto de que el flujo sea proporcional a la amplitud de la intensidad en el solenoide (los datos se midieron para una intensidad  $I_{os} = 6.0$  A obtenemos:

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= 1.33 \times 10^{-5} I_{os} \exp(-57.8 z) \text{ weber} \\ \Phi'_0(z) &= -7.7 \times 10^{-4} I_{os} \exp(-57.8 z) \text{ volt}\end{aligned}\quad (16)$$

## Flujo magnético sobre el anillo de aluminio en función de la altura

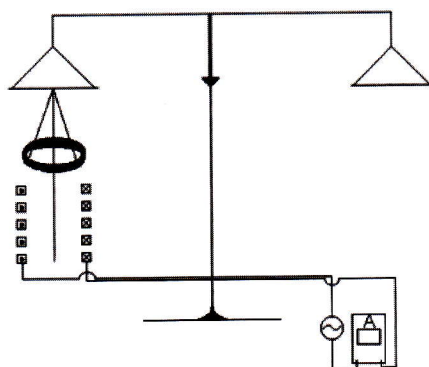
La gráfica de la figura representa el flujo magnético sobre el anillo de aluminio en función de la altura; la curva continua es el ajuste dada por la función exponencial:



## Medida de la fuerza sobre el anillo.

Para medir la fuerza sobre el anillo en función de la corriente en el solenoide utilizamos el dispositivo de la figura; suspendimos el anillo de uno de los brazos de la balanza y la equilibramos para una corriente nula en el solenoide, luego variamos la corriente y equilibramos nuevamente la balanza colocando pesas en el brazo derecho.

De este modo la diferencia de masa corresponde a la fuerza de Lorentz, por unidad de aceleración de la gravedad, ejercida sobre el anillo.



*Se indica uno de los posibles sentidos de la corriente.*

## Cuadro de valores

El siguiente cuadro de valores corresponde a la fuerza sobre el anillo en función de la amplitud de la intensidad en el solenoide para una altura de:  $z = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$ .



| Intensidad (A) | Fuerza ( $\times 10^{-3}$ N) |
|----------------|------------------------------|
| 1.6            | 6.9                          |
| 1.9            | 9.8                          |
| 2.3            | 14.7                         |
| 2.7            | 19.6                         |
| 3.0            | 24.5                         |
| 3.3            | 29.4                         |
| 4.5            | 49.0                         |
| 5.0            | 58.9                         |
| 5.5            | 68.7                         |
| 7.15           | 98.1                         |
| 7.8            | 127.5                        |

Los datos experimentales obtenidos se ajustaron con una función potencial de la intensidad de la corriente que muestra que la fuerza sobre el anillo se aparta del comportamiento cuadrático de la intensidad como habíamos supuesto en un principio; lo que indica que la inducción magnética  $B$  presenta un comportamiento no lineal con el campo magnético  $H$  debido a la saturación parcial del núcleo de hierro.

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= 3.50 \times 10^{-3} I_{os}^{1.75} \\ \langle F \rangle &= 7.0 \times 10^{-3} I_{os}^{1.75} \exp(-115.6z) \end{aligned} \quad (17)$$

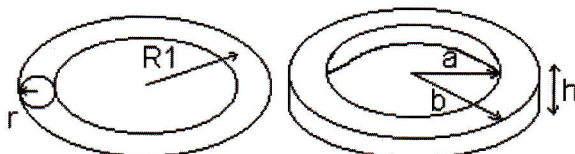
El flujo magnético sobre el anillo y su derivada en función de la amplitud de la intensidad de la corriente en el solenoide resulta suponiendo que este sea proporcional a  $I_{os}^{0.875}$  y de acuerdo a (15):

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= 1.67 \times 10^{-5} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \\ \Phi'_0(z) &= -9.64 \times 10^{-4} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \end{aligned} \quad (18)$$

## Cálculo teórico de la fuerza magnética sobre el anillo

### Cálculo de la resistencia y de la inductancia del anillo<sup>4</sup>

La inductancia de un anillo de sección circular como el de la figura viene dado por:



<sup>4</sup> La inductancia de un anillo se obtuvo de Fields and waves in communication electronics (Simon Ramo).

$$L = \mu_0 R_1 [\ln(8R_1/r) - 7/4] \quad (19)$$

Si la sección no es circular, aproximo  $r$  a partir de:

$$\pi r^2 = A \quad \text{luego: } r = \sqrt{A/\pi}$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal.

### Datos del anillo

$$\begin{aligned} a &= 1.24 \text{ cm} & R_1 &= (a+b)/2 = 1.87 \times 10^{-2} \text{ m} & \text{masa del anillo} &= 16.0 \text{ gr} \\ b &= 2.5 \text{ cm} & A &= (b-a)h = 0.523 \text{ cm}^2 & \rho &= 2.82 \times 10^{-8} \Omega \text{m a } 20^\circ \text{C} \\ h &= 4.15 \text{ mm} & r &= 4.08 \times 10^{-3} \text{ m} & \alpha &= 3.9 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

Como el anillo sufre un calentamiento por efecto Joule durante el experimento la temperatura aumenta; si estimamos que su temperatura es del orden de  $35^\circ\text{C}$  el coeficiente de resistividad es:

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha(35 - 20)) = 2.985 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$$

Calculando obtenemos para la inductancia del anillo  $L = 4.352 \times 10^{-8} \text{ Hy}$ .

La resistencia eléctrica del anillo es:  $R = \rho 2\pi R_1 / A = 6.71 \times 10^{-5} \Omega$

La pulsación (de acuerdo a que  $f_{UTE} = 50 \text{ Hz}$ ) viene dada por:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 314.16 \text{ s}^{-1} \\ \frac{L\omega^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} &= 4.185 \times 10^5 \text{ Hy}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

Recordando que la fuerza media y el flujo sobre el anillo son:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\Phi_0(z) \Phi'_0(z) \frac{L\omega^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} \quad (14)$$

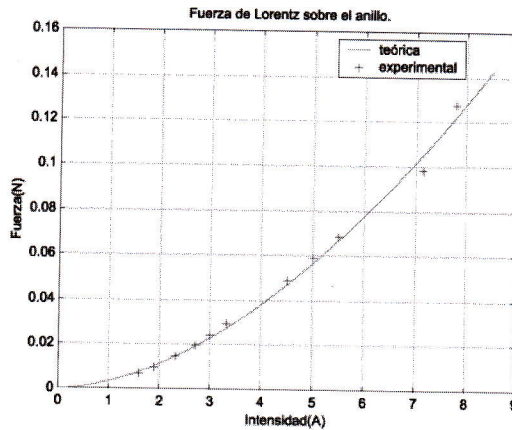
$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= 1.67 \times 10^{-5} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \\ \Phi'_0(z) &= -9.64 \times 10^{-4} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \end{aligned} \quad (18)$$

Obtenemos finalmente que la fuerza sobre el anillo es:

$$\langle F \rangle = 6.74 \times 10^{-3} I_{os}^{1.75} \exp(-115.61z) \quad (21)$$

Comparando (17) con (21) y el gráfico de la figura podemos observar que existe una excelente concordancia entre el modelo teórico y los datos experimentales.





La coincidencia entre ambos resultados es asombrosa sobre todo por el hecho que la inductancia del anillo se estimó a partir de una geometría diferente a la de la fórmula de referencia (19).

## Solución numérica del conjunto de ecuaciones dinámicas y eléctricas del fenómeno

La fem inducida en el anillo viene dada por la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{\text{anillo}} = - \frac{d\Phi(z,t)}{dt}$$

con  $\Phi(z,t) = 1.67 \times 10^{-5} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \cos(\omega t)$

Es interesante observar que la derivada del flujo magnético a través del anillo contiene dos términos, uno debido a la variación de la parte temporal del flujo y otro debido a la variación de la altura del anillo respecto del tiempo<sup>5</sup>. (la variación de  $z(t)$  origina un flujo variable en el tiempo pues el campo magnético del solenoide no es espacialmente uniforme)

Luego la fem inducida es:

$$\varepsilon = 1.67 \times 10^{-5} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \left[ \omega \sin(\omega t) + \frac{dz}{dt} \cos(\omega t) \right] \quad (22)$$

La ecuación para la corriente en el anillo es de acuerdo a la ley de las mallas de Kirchhoff:

$$\varepsilon_{\text{anillo}} = - \frac{d\Phi(z,t)}{dt}$$

con  $\Phi(z,t) = 1.67 \times 10^{-5} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) \cos(\omega t) \quad (23)$

<sup>5</sup> Esta variación del flujo debido a la derivada de  $z$  respecto del tiempo es lo que produce un amortiguamiento de la oscilación del anillo como demostraremos graficando la solución sin incluir dicho término.

sustituyendo (22) en (23) obtenemos la ecuación diferencial para la corriente en el anillo:

$$\frac{dI_a}{dt} = -\frac{1.67 \times 10^{-5}}{L} I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) [\omega \sin(\omega t) + \frac{dz}{dt} \cos(\omega t)] - \frac{R}{L} I_a \quad (24)$$

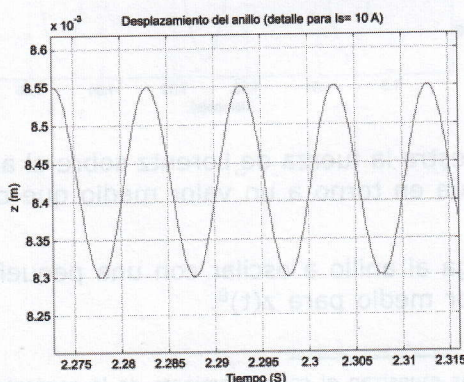
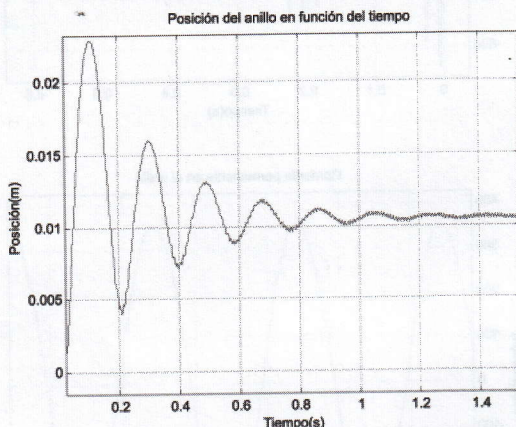
Finalmente a partir de la segunda ley de Newton aplicada al anillo tenemos<sup>6</sup>:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -I_a 2\pi r_a B_r(z, t) - mg$$

sustituyendo a partir de (11) obtenemos :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = I_a \Phi'(z, t) - mg \quad \text{y finalmente:} \quad (25)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -I_a (-57.8) 1.67 \times 10^{-5} \cos(\omega t) I_{os}^{0.875} \exp(-57.8z) - mg$$

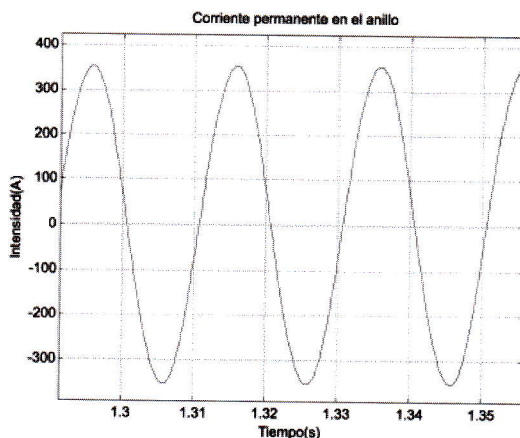
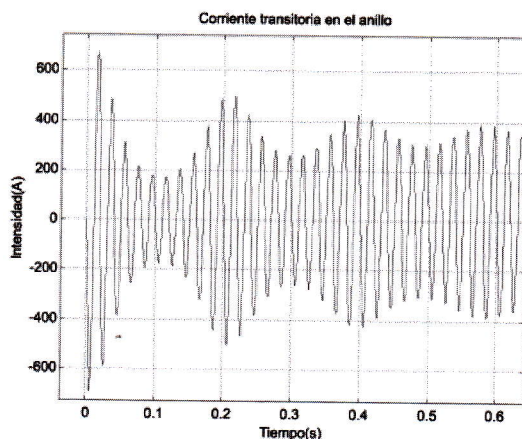


<sup>6</sup> Podemos observar que el conjunto de ecuaciones diferenciales están acopladas de modo que el término de la derivada de  $z(t)$  respecto del tiempo de (24) afecta la ecuación de movimiento y así produce el amortiguamiento del anillo.



La primera gráfica corresponde a la solución numérica del conjunto de ecuaciones diferenciales para el desplazamiento del anillo en función del tiempo para una intensidad en el solenoide de 10 A.

Podemos observar, debido a que existe en todo momento una fuerza tanto atractiva como repulsiva sobre el anillo, que no existe una posición de equilibrio estable propiamente dicha, sino que el anillo oscila, como muestra el detalle, con una amplitud pequeña que tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia de la corriente en el solenoide<sup>7</sup>.



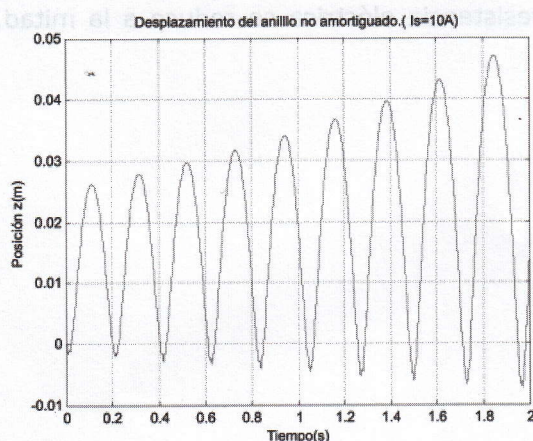
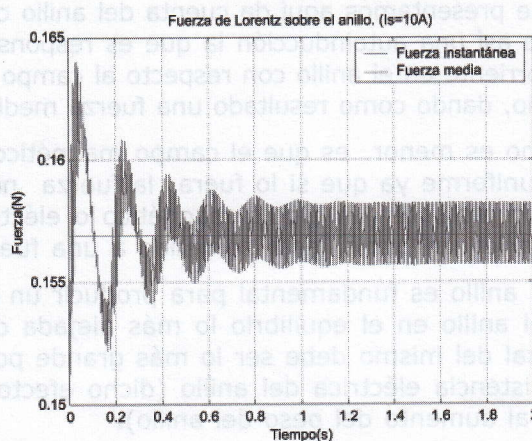
La última gráfica muestra la fuerza de Lorentz sobre el anillo en donde puede observarse que fluctúa en torno a un valor medio que corresponde al peso del anillo.

Esta fluctuación obliga al anillo a oscilar con una pequeña amplitud alrededor de un cierto valor medio para  $z(t)$ <sup>8</sup>.

<sup>7</sup> Las dos últimas gráficas muestran el comportamiento de la corriente en el anillo, y como el transitorio tiende a desaparecer debido al término de amortiguamiento mencionado anteriormente. Es de destacar que la amplitud de la corriente en el anillo es bastante elevada (353 Ampére aproximadamente)

<sup>8</sup> Todas las gráficas y la solución numérica del conjunto de ecuaciones diferenciales fueron realizadas en Matlab 5.3.





La gráfica inferior representa el desplazamiento en función del tiempo, no amortiguado, si no se considera en la variación del flujo respecto al tiempo el término debido a la velocidad del anillo (o sea a la derivada de  $z(t)$  respecto del tiempo).

## Conclusiones finales

La levitación magnética del anillo de aluminio (llamado en la bibliografía anillo de Thomson en homenaje al físico norteamericano Elihu Thomson) es una fascinante demostración del electromagnetismo. La explicación más común de este efecto es aquella que indica que el campo magnético del solenoide tiene una polaridad idéntica a la del campo magnético generado por el anillo, produciéndose entonces, un efecto repulsivo entre ambos.

Esta explicación sin embargo es insuficiente ya que, como es posible demostrar, existe sobre el anillo una fuerza tanto atractiva como repulsiva cuyo valor medio temporal es nulo.

La explicación que presentamos aquí da cuenta del anillo como una pequeña bobina que posee así una autoinducción la que es responsable del desfase temporal de la corriente en el anillo con respecto al campo magnético producido en el primario, dando como resultado una fuerza media repulsiva.

Otro hecho que no es menor es que el campo magnético producido por el solenoide es no uniforme ya que si lo fuera la fuerza neta sobre el anillo sería nula en todo instante (un dipolo magnético o eléctrico en un campo magnético o eléctrico uniforme está sometido a una fuerza neta nula).

La geometría del anillo es fundamental para producir un efecto importante (una posición del anillo en el equilibrio lo más alejada del solenoide<sup>9</sup>), la sección transversal del mismo debe ser lo más grande posible ya que esto disminuye la resistencia eléctrica del anillo (dicho efecto supera el efecto contrario debido al aumento del peso del anillo).

Si colocáramos dos anillos idénticos, uno encima del otro, la posición del conjunto sería con una  $z$  mayor que con un solo anillo, ya que la fuerza media es mayor al doble de la primera porque la inductancia del conjunto disminuye y la resistencia eléctrica se reduce a la mitad.

---

<sup>9</sup> No existe una posición de equilibrio del anillo como mencionamos anteriormente ya que la fuerza neta sobre el mismo nunca se anula.



# EDUCACIÓN en FÍSICA

Revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay  
Volumen 8, Número 4

Diciembre, 2014

## CONTENIDO

EDITORIAL ..... 3

PROCEDIMIENTO DE  
PRESENTACIÓN DE TRABAJOS ..... 4

EXPANSIÓN DEL AIRE EN  
LOS COHETES DE AGUA  
*Alejandro Romanelli, Ítalo Bove,  
Federico González Medina y Víctor Micenmacher* ..... 5

RESOLUCIÓN A SITUACIONES  
PROBLEMÁTICAS EN FÍSICA (IV)  
*Ismael Núñez* ..... 15

CON LA FÍSICA A TODAS PARTES:  
EXPERIENCIAS UTILIZANDO EL TELÉFONO INTELIGENTE  
*Martín Monteiro, Cecilia Cabeza y Arturo C. Martí* ..... 17

UN ENFOQUE EXPERIMENTAL  
SOBRE LA LEY DE COULOMB  
*Leonardo Machín, Álvaro Suárez y Marcelo Vachetta* ..... 27

LEVITACIÓN MAGNÉTICA  
DE UN ANILLO  
*Francisco Echegorri y Agustín Mazzini* ..... 37