

EDUCACIÓN en FÍSICA

ISSN:0797-9045

Revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay



EDUCACIÓN EN FÍSICA

Volumen 8, Nº 6
Setiembre, 2016

Depósito Legal: 299222/16

Redactor Responsable:

Gustavo González
revistaapfu@gmail.com

Consejo de Redacción:

Pablo García
Ismael Núñez

Colaborador:

Guzmán Trinidad

Educación en Física es una revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay, que se distribuye gratuitamente entre sus socios.

Comisión Directiva de la APFU:

Eduardo Bonda, *Presidente*
Gustavo González, *Vicepresidente*
Marco Pereira, *Secretario*
Verónica Laluz, *Tesorera*
Lidia Díaz, *Vocal*

Dirección de la Revista:

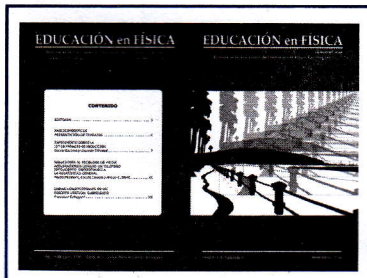
Av. 18 de Julio 1559 - Apto. 401
Montevideo CP 11200
Telefax: (+598) 2400 1258
E-mail: revistaapfu@gmail.com
apfu@adinet.com.uy

Publica:

Ediciones IDEAS | Mercedes 1786
11200 Montevideo-Uruguay
Telefax: (+598) 2408 6985
E-mail: edideas@adinet.com.uy

M.E.C.:

Ed. amparada por Decreto 218/996



Portada

EDITORIAL

La Comisión Directiva de la APFU entiende que corresponde realizar una profunda reflexión, sobre la difícil situación que atraviesa la Educación en nuestro país. Este contexto ha interferido negativamente con el desarrollo del **«XIII Encuentro Internacional de Educación en Física y XXVI Encuentro Nacional de Profesores de Física»**. Desde hace algunos años no se ha contado con ningún tipo de apoyo para la realización de los Encuentros, solo se ha otorgado el auspicio y la justificación de las inasistencias de acuerdo al Estatuto Docente por el Art. 70.8.

Es importante reconocer a los socios por sus aportes, participación en los Encuentros y otras actividades desarrolladas por la APFU, preocupados siempre por mejorar su labor y el entorno de la comunidad educativa, fortaleciendo el compromiso con la educación, compartiendo en forma solidaria y honoraria su trabajo en talleres, artículos para la revista y otras actividades. Todas estas actividades son financiadas casi exclusivamente con el aporte mensual de los socios a la APFU y de la economía particular de los asistentes.

Este año nos enfrentamos con una situación realmente preocupante e indignante. El CETP ha negado la justificación de las inasistencias. El CES y CODICEN no han contestado hasta el momento (viernes 12 de agosto de 2016). Solo el CFE otorgó la justificación de las inasistencias por artículo 70.8 informando en tiempo y forma de su decisión. Las solicitudes correspondientes se iniciaron en el mes de febrero de 2016 en todos los Consejos. La Asociación de Profesores de Física, comenzó en diciembre de 2015 a organizar su XXVI Encuentro Nacional de Profesores, como hasta ahora amparada en la resolución del Consejo Directivo Central, Resolución Nº 12 Acta Nº 65 de fecha 05/10/2004 en la que se establecieron los períodos en que deben desarrollarse los cursos, jornadas, congresos o seminarios de actualización, capacitación y perfeccionamiento técnico del cuerpo docente. Al no tener respuesta se solicitó una entrevista, la cual no ha sido otorgada hasta el momento.

Para la Asociación de Profesores de Física del Uruguay sigue vigente lo relativo a planificación de actividades en los períodos de vacaciones de febrero, julio y setiembre conforme a la resolución de fecha 28 de junio de 2007 al no haber recibido en tiempo y forma comunicación del Consejo Directivo Central.

El CETP se ampara en la Resolución Nº 8 (Acta Nº 73) de fecha 15/09/2015 del Consejo Directivo Central, en la que se dispone a destinar las actividades extracurriculares los días sábados, con el fin de minimizar la afectación del «tiempo aula» para los estudiantes. Dicha resolución, no fue comunicada a la Asociación en tiempo y forma para poder organizar el congreso 2016.

La APFU considera que el «**XIII Encuentro Internacional de Educación en Física y XXVI Encuentro Nacional de Profesores de Física**» no es una actividad extracurricular más si no que es la única instancia de carácter nacional e internacional sobre la enseñanza de la física que se realiza en nuestro país y es organizada exclusivamente por la Asociación de Profesores de Física del Uruguay.

Es difícil comprender la actitud adoptada por la mayoría de las autoridades de la enseñanza frente a la realización de un evento que aporta a la profesionalización DOCENTE. Existe un discurso de cómo mejorar la labor docente, sin embargo ponen trabas a que estas se lleven a cabo. Los últimos años la Asociación ha sido un referente en la enseñanza de la Física, sus 4 Documentos elaborados en Jornadas en las cuales participaron sus socios y la Revista de APFU son material de consulta para estudiantes y docentes.

Por todo lo expresado, queremos hacer énfasis en el total desacuerdo por los hechos ocurridos y reafirmar nuestra discrepancia con la posición tomada por las autoridades de CETP, CES y CODICEN.

Comisión Directiva

Asociación de Profesores de Física

Integración de los Consejos

CONSEJO DE FORMACIÓN EN EDUCACIÓN

Directora: Mag. Ana Lopater

Consejeros: Mag. María Dibarbouré
Mtro. Luis Garibaldi
Prof. Edison Torres Camacho

CONSEJO DIRECTIVO CENTRAL

Presidente: Prof. Wilson Netto Marturet

Consejeros: Mag. María Margarita Luaces
Prof. Laura Motta
Mtra. Elizabeth Ivaldi
Dr. Robert Silva García

CONSEJO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Directora Gral.: Prof. Celsa Puente

Consejeros: Prof. Javier Landoni
Prof. Isabel Jaureguy

CONSEJO DE EDUCACIÓN TÉCNICO PROFESIONAL

Directora Gral.: Ing. Agr. Nilsa Pérez

Consejeros: Mtro. Técnico Miguel Venturiello
Mtro. Técnico César González

Alejandro Villamil - In memoriam

Ayer despedimos «al Villa».

Escribo estas palabras desde el dolor y la admiración. Respecto a la admiración, uno de sus motivos es la convicción de no poder hacer cosas que Alejandro hacía naturalmente: comenzar a pensar ya un problema de casi cualquier tema de física, bailar tango, mentir echando el resto en el truco, levantar paredes, construir todo tipo de objetos, entre otros muchos ejemplos.

Escribo también desde el lugar de una persona de su generación, un cincuentón, que siente la pérdida de un ser humano de forma inesperada. No encontramos lugares de dónde agarrarnos en estas circunstancias. Me queda el aporte de una compañera y su forma de amortiguar la pérdida: «él eligió vivir, no tenía límites para trabajar como profesor, como constructor, como innovador, como pensador, como si tuviera una inagotable fuente de energía...». Agrego que esa forma, en muchas ocasiones irreverente, de plantarse en la vida me enriqueció personalmente, y creo no ser el único. Estamos acostumbrados a presentar pruebas de nuestros dichos, el desfile de gente en su despedida puede ser una de ellas. Había varias generaciones presentes, desde nuestros mayores a estudiantes a los que Alejandro acercó generosamente formas y herramientas de encarar nuestro trabajo.

Mis convicciones no me permiten pensar en un reencuentro. No me queda otra que despedirte. Como dije en otros ámbitos Villa, te quiero recordar tocando la guitarra de oído en una rueda de amigos, jugando al truco hasta el amanecer, bailando tango y cumbia con Victoria, tu compañera. Salud compañero.

Daniel Baccino, 12 de febrero de 2016.

PD: Este texto recibió aportes de compañeros y amigos. En ese sentido es también un poquito de lo que quiso ser: una construcción colectiva.

PROCEDIMIENTO DE PRESENTACIÓN DE TRABAJOS

Pueden ser enviadas para su publicación contribuciones de diverso tipo: trabajos teóricos, experimentales, de investigación, tesis, comentarios de libros, trabajos de divulgación, sugerencias de sitios web, comentarios acerca de software, y todo artículo que promueva el conocimiento o la enseñanza de la Física o ciencias afines.

Estos trabajos pueden enviarse impresos, manuscritos o en formato electrónico; por e-mail a:

*apfu@adinet.com.uy o
revistaapfu@gmail.com,*

por fax al (598) 2400 1258 o entregados personalmente en el local de la Asociación (18 de Julio 1559 Ap. 401), días hábiles de 14.00 hs a 19.00 hs) en forma impresa o manuscrita y si es en formato electrónico en CD, DVD, pendrive o tarjetas de memoria, debidamente identificados adjuntando una carta donde se solicita la consideración de dicho trabajo para ser publicado en la Revista.

En general no se aceptarán trabajos que ya hayan sido publicados, o estén en consideración de publicación, por otro medio diferente a esta Revista. El Consejo de redacción podrá autorizar en forma extraordinaria la publicación de trabajos que se encuentren en la condición anterior atendiendo a razones justificadas.

Cuando la APFU recibe un trabajo para su publicación en la Revista asume que:

- a. dicho trabajo puede ser publicado en la Revista o reimpresso, como considere el Consejo de Redacción. Para su publicación en un medio diferente a la Revista,

la APFU requerirá de los autores una autorización por escrito.

- b. es responsabilidad de los autores, no de la APFU, requerir el consentimiento de otras partes para la publicación de dicho material, como ser por ejemplo, imágenes o datos previamente publicados.

El contenido de los trabajos publicados en la Revista es de exclusiva responsabilidad de sus autores, no de la APFU.

Los trabajos serán arbitrados en forma anónima y del informe de este arbitraje se decidirá si dicho trabajo amerita ser publicado en la Revista. Durante el arbitraje se puede requerir de los autores explicar, ampliar o reescribir parte de su trabajo. Si se decide publicar el trabajo, se les comunicará a los autores la aceptación y se les pedirá, si aún no lo han hecho, de enviar el trabajo en formato electrónico y con el estilo fijado por la Revista.

Para su publicación los trabajos deben ser presentados en formato electrónico susceptible de ser editado. Se prefiere que lo hagan en formato .doc ya sea con MS Word, Writer de OpenOffice.org u otro editor de texto que genere archivos .doc. No se aceptan en formato .pdf. Los trabajos deben ser enviados a la Asociación o la Revista en la forma descripta anteriormente.

Estos trabajos deben ser presentados siguiendo ciertas reglas de estilo. Estas reglas, así como una plantilla que sirve de modelo para la presentación de los trabajos, se encuentran en la página web de la APFU:

apfu.uy

EXPERIMENTO SOBRE LA LEY DE FARADAY DE INDUCCIÓN

Daniel Baccino¹ - Guzmán Trinidad²

¹ Profesor y ayudante preparador de Física en el CES y Profesor en el CFE;
dbaccisi@gmail.com

² Profesor y ayudante preparador de Física en el CES y Profesor en el CFE;
guzman.trinidad@gmail.com

Artículo

«¿Cuál es la utilidad de un bebé recién nacido?».

*Michel Faraday citado
por Richard Feynman*

Resumen

De forma independiente los autores han observado recientemente cómo estudiantes de nivel medio pueden maravillarse con algunos resultados del electromagnetismo. Este trabajo trata sobre uno de ellos consistente en una actividad experimental realizada en un curso práctico de tercer año de bachillerato asociada a la ley de Faraday de inducción electromagnética: el montaje (y caracterización de la respuesta E/S) de un transformador construido con materiales de fácil acceso en laboratorios de física de bachillerato cuya bobina secundario es devanada por los estudiantes.

Introducción

En los programas de física correspondientes a los cursos de tercer año de bachillerato el electromagnetismo de Maxwell constituye un polo único o relevante dependiendo de la opción tomada por el estudiante.

En ese marco una de las leyes de Maxwell del electromagnetismo, la asociada a una de las personalidades más fértiles en el área de la física experimental (Michael Faraday, 1791-1867), se presenta como una herramienta con peso en algunas áreas de la tecnología. Piense el lector, por ejemplo, qué cosas no podría hacer en un día si no existiera la energía eléctrica transportable de forma eficiente desde los lugares donde se genera hasta nuestros hogares. La aplicación de la ley de Faraday al funcionamiento de un transformador de CA tanto elevador como reductor de voltaje es básica en este sentido.

En nuestro medio se realizan contadas actividades experimentales vinculadas a este tema en los cursos referidos. A modo de ejemplo mencionamos *Ley de Faraday* con la interface Dédalo, que puede consultarse en la página 51 de la referencia [1]. También se analizan transformadores rudimentarios evaluando la relación de transformación, entre otros.

La actividad que se plantea en este trabajo consiste en mostrar el ajuste a lo predicho por la ley de Faraday al conformar un transformador básico. Nos

parece relevante, además, acercar propuestas realizables con los materiales que se encuentran en la mayoría de laboratorios de física de instituciones públicas que incluyen cursos de bachillerato.

Tres miradas desde la teoría

Sobre la ley de Faraday

Elegimos tomar el enfoque de Feynman [2] referido a la ley de Faraday, porque plantea un aspecto que no se desarrolla usualmente en el contexto de enseñanza media: las situaciones vinculadas a un campo magnético estático en un circuito «móvil», y las de un circuito fijo en el espacio inmerso en un campo magnético variable tienen resultados análogos pero los razonamientos tienen diferencias. Es recomendable la lectura de la fuente [2].¹

Cuando Faraday hizo público su notable descubrimiento de que un flujo magnético variable produce una fem, le preguntaron (tal como le preguntan a cualquiera cuando descubre un hecho nuevo de la naturaleza): «¿para qué sirve?». Todo lo que había descubierto era la particularidad de que se producía una corriente pequeñita cuando movía un alambre cerca de un imán. ¿Cuál podía ser la «utilidad» de eso? Su respuesta fue: «¿Cuál es la utilidad de un bebé recién nacido?»

La cita anterior se realiza en el apartado *La tecnología eléctrica* (Op. cit.), donde el autor desarrolla algunas de las aplicaciones prácticas más relevantes: motor, transformador, entre otras. Al final del apartado escribe el párrafo que citamos a continuación:

La tecnología eléctrica moderna comenzó con los descubrimientos de Faraday. El bebé inútil se convirtió en un prodigio y cambió la faz de la tierra de una manera que su orgulloso padre nunca hubiera imaginado.

La situación en este trabajo corresponde a un arrollamiento estático inmerso en una zona del espacio en la que está definido un campo magnético que varía en el tiempo.

La ecuación 1 puede considerarse una expresión para la ley de Faraday, donde la integral del primer miembro se realiza en torno a una curva cerrada Γ fija en el espacio, y da el valor de la fem inducida. El derivando del segundo miembro es una integral tomada sobre una superficie S fija limitada por dicha curva cerrada.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d(\text{flujo a través de } S)}{dt} \quad \text{Ec.1}$$

La variación en el tiempo del campo magnético generado por el arrollamiento² primario (en el que hay N_p espiras) se debe a que se alimenta a éste con un generador de CA. Nuestro arrollamiento secundario, caracterizado

¹ Se puede acceder a la obra de forma libre para leer en línea (en inglés) en el enlace: <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

² Los términos arrollamiento, devanado y bobinado se utilizan como sinónimos aquí.

por un número N_s de espiras «superpuestas» que puede ajustarse, conforma la materialización de la curva matemática Γ . El núcleo de hierro favorece que pueda modelarse al conjunto de forma que las líneas de campo magnético inductor atravesasen mayoritariamente una superficie S .

Algunos aspectos técnicos

Desde un punto de vista más técnico, en las referencias [3] y [4] que se toman a modo de ejemplo, se puede profundizar sobre estos aspectos.

Chapman (p. 60) define:

Un transformador es un dispositivo que cambia potencia eléctrica alterna de un nivel de voltaje a potencia eléctrica alterna a otro nivel de voltaje mediante la acción de un campo magnético. Consta de dos o más bobinas de alambre conductor enrolladas alrededor de un núcleo ferromagnético común.

Al conectar una tensión alterna V_1 al devanado primario (o de entrada), circula una corriente que genera un flujo magnético variable. Este genera una fem inducida en el devanado secundario (o de salida), que da lugar a una tensión V_2 en bornes del mismo. Se logra así transformar una tensión alterna de valor eficaz V_1 en otra de valor eficaz V_2 , de la misma frecuencia. Cuando el dispositivo consta de dos arrollamientos, como el que utilizamos en este trabajo, se dice que es *monofásico*.

La figura 1 muestra el diagrama esquemático de un transformador tal como se muestra usualmente en un texto de física general. En un contexto técnico hay que señalar que esa representación no se ajusta estrictamente a las dos formas usuales de construir un transformador. El diagrama se acerca a una de las formas constructivas (llamada *tipo núcleo*) en la que el núcleo es una pieza rectangular de acero laminada y ambos arrollamientos se devanan sobre los dos lados del rectángulo. El montaje en nuestro experimento, si bien tiene fines educativos, se aproxima a esta forma.

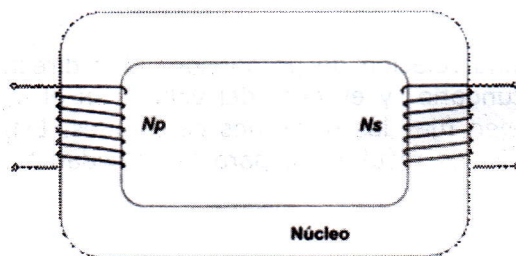


Figura 1. Esquema de un transformador de dos arrollamientos.

En ocasiones es posible modelar, al menos en una primera aproximación, a un transformador como *ideal*. Se llama así a uno que «no tiene pérdidas», lo que implicaría que toda la potencia eléctrica suministrada a la entrada (primario) puede colectarse a la salida (secundario) como potencia eléctrica. Los efectos no considerados cuando se lo modela así son pérdidas: *en el cobre*, debidas a la disipación por efecto Joule en los dos arrollamientos; *por corrientes parásitas*, por calentamiento resistivo en el núcleo; *por*

histéresis, asociadas al reordenamiento de dominios magnéticos en el núcleo; *por flujo disperso*, ya que parte del flujo magnético no atraviesa ambos devanados.

Si se quieren considerar estos efectos, se debe elaborar un modelo de transformador que los incluya. Una forma de hacerlo consiste en construir circuitos equivalentes al transformador. Para determinar parámetros del modelo se usa realizar medidas bajo dos situaciones separadamente: prueba de circuito abierto (o en vacío) y prueba de cortocircuito. La primera de ellas se realiza dejando abierto el circuito en el secundario. Nuestro experimento se desarrollará muy aproximadamente en esta condición, ya que conectaremos un multímetro funcionando como voltímetro con una relativamente alta impedancia.

En síntesis, estudiaremos un transformador construido con fines didácticos, con las características siguientes: monofásico, tipo núcleo, y reductor (ya que $N_s < N_p$). En principio lo modelaremos como ideal.

Acercándonos al contexto de enseñanza

Con estos supuestos podemos escribir una expresión más cercana al lenguaje usual en la enseñanza media, modelando nuestro transformador ideal, mediante la ecuación 2,³

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad \text{Ec. 2}$$

Aquí V_s es el voltaje en bornes del circuito secundario, y V_p su análogo en bornes del primario. La ecuación 2 vale para valores eficaces de los voltajes, que podemos medir mediante un voltímetro digital.

En nuestro caso, donde se dejan fijos N_p y el valor eficaz del voltaje aplicado al primario, podemos reordenar la ecuación 2 de la forma siguiente:

$$V_s = \frac{V_p}{N_p} \cdot N_s \quad \text{Ec. 3}$$

La Ec. 3 predice una relación de proporcionalidad directa entre el número de espiras del secundario y el valor del voltaje en el secundario, a condición de que se dejen fijas las otras dos cantidades. Esta ecuación será la base del análisis de los resultados, para la actividad tal como la propusimos.

El dispositivo experimental

La figura 2 muestra el montaje experimental con el que se obtuvo la información que se muestra más adelante. En ella se ve un arrollamiento primario (A) con una cantidad fija de espiras, un arrollamiento secundario (B) en el que el número de espiras se puede cambiar fácilmente de uno en uno, un

³ En un transformador ideal los fasores V_p y V_s no están desfasados, ya que su cociente se puede expresar mediante un número real.

núcleo laminado de hierro (C) que acopla ambos arrollamientos, un generador de voltaje alterno (D), un multímetro (E) y conectores. En la versión más elemental del diseño, se miden valores eficaces de voltaje en ambos arrollamientos, al variar el número de espiras en el secundario. En la figura se muestra un solo multímetro conectado a bornes del secundario, pero puede ser conveniente utilizar otro conectado a bornes del primario (siempre que se cheque previamente su calibración) para monitorizar la constancia del voltaje eficaz en el primario mientras se realiza toda la actividad experimental.

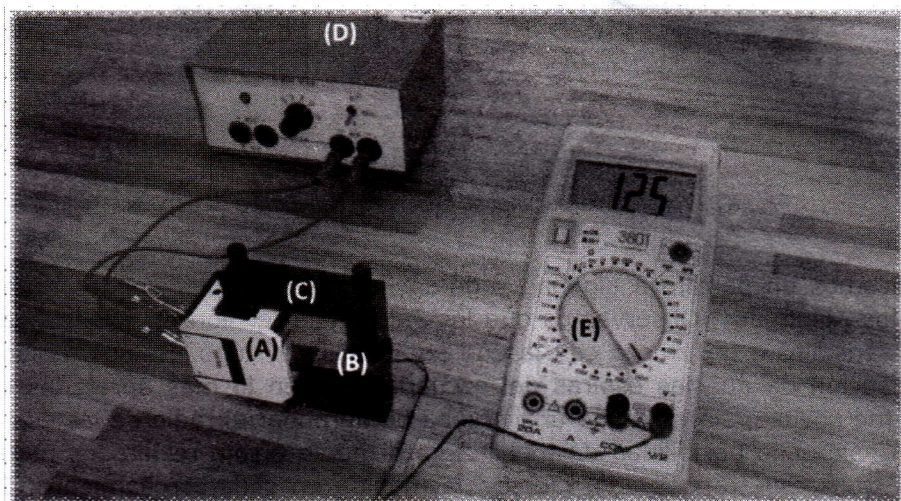


Figura 2. Parte del dispositivo experimental.

La materialización del dispositivo básico se realizó con los siguientes componentes: Bobina de 1000 espiras; Núcleo-U con núcleo-I como yugo; Cable (para devanar el secundario) de pequeña sección y 1,5 m de largo con terminales banana en sus extremos; Multitester digital 3801 *Demestres*; salida c/a de Fuente de alimentación mod. SF2/2. Chequeos de valores de tensión se realizaron con Osciloscopio Promax 00-4028 (20 MHz), e interfaz Lab Pro de Vernier. Los valores graficados en el Anexo se midieron con esta última.

Resultados experimentales

Una de las razones por la que compartimos esta actividad es la precisión que se observa en los resultados. Como mencionamos al describir el dispositivo, alimentamos a nuestro arrollamiento primario con una señal alterna sinusoidal (ver Anexo) ajustada a un voltaje eficaz de 13 V aproximadamente. En el gráfico de la figura 3 se muestra los valores del voltaje eficaz medido (en mV) en bornes del arrollamiento secundario, al ajustar el número de espiras entre $N_s = 1$ y $N_s = 10$.

Superpuesto a los datos experimentales se ve un ajuste lineal cuyos coeficientes se muestran sobre la gráfica, e indican una muy buena correspondencia con lo esperado.

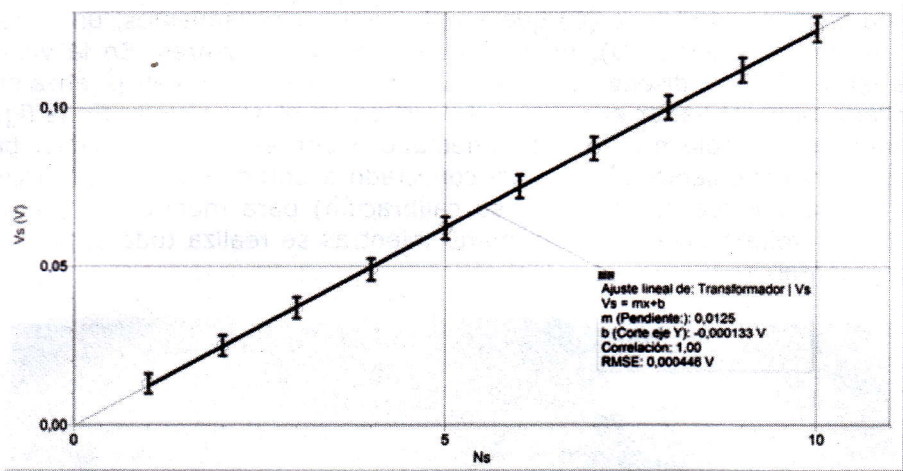


Figura 3. Voltaje en el secundario en función del número de espiras.

Dedicamos un párrafo a algunas sugerencias prácticas que pueden favorecer los resultados. Observamos que los valores de tensión en el secundario son sensibles a la firmeza con la que se atornilla el yugo. Hemos tenido la precaución de que las espiras del secundario estén lo más apretadas que nos fue posible; sin embargo una prueba de agrandar el radio de las espiras para valorar la posibilidad de medir flujo disperso arrojó resultados negativos. Utilizamos rangos adecuados a la medida en cada arrollamiento: 2 V para la medida en el secundario y 20 V para el primario.

Comentarios finales

Analizando exclusivamente la correlación entre los datos experimentales y el ajuste lineal, observamos una desviación cuadrática media (RMSE por su sigla en inglés) del orden de las décimas de milivoltio. Teniendo presente que el voltímetro, en el rango utilizado, genera una incertidumbre absoluta del orden de algunas milésimas de voltio (representada en el gráfico de la figura 3), podemos considerar aceptable el resultado.

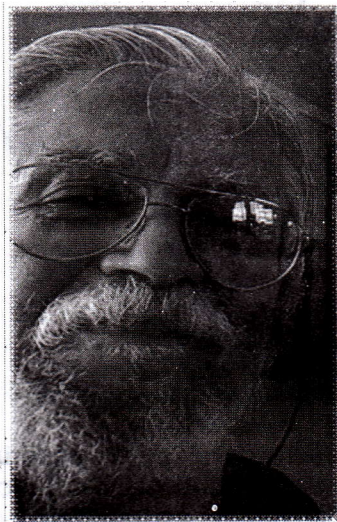
Un elemento adicional importante tiene que ver con la ordenada en el origen de abscisas. Tener un valor del orden de las décimas de milivoltio, cuando se miden valores que en promedio son cercanos a los 50 mV, es un resultado aceptable para el nivel en el que se propone la actividad.

Nuestro modelo predice que la pendiente en el gráfico de la figura 3 debe coincidir con el cociente V_p/N_p . El cociente da $13,0 \times 10^{-3}$ V, y la pendiente $12,5 \times 10^{-3}$ V.

Sintetizando, la propuesta está en la línea de acercar actividades experimentales que se puedan implementar con materiales disponibles en el medio, cuyos resultados se apeguen a la predicción teórica, al menos en una primera aproximación. Esperamos que los docentes que definan trabajar sobre esta propuesta tengan resultados motivadores con sus estudiantes.

In memoriam

Este trabajo está dedicado a la memoria del Profesor Juan Ramón Correa Vila.



Referencias

- [1] *García, P., Correa, J., «DÉDALO Interface para uso en experimentos de Física», versión 1.0, PEDECIBA, Proyecto de Apoyo al Laboratorio de Física del IPA, Montevideo, Uruguay, 1991.*
- [2] *Feynman R., et. al. Física (Vol. II). Fondo Educativo Interamericano. 1972.*
- [3] *Chapman, S. Máquinas eléctricas (3ª. edición). McGrawHill. 2000.*
- [4] *Rodríguez Pozueta, M. Transformadores. Universidad de Cantabria. España. 2012. Material de acceso libre. Acceso 15/12/2015: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Trafos.pdf>*

Agradecimientos

A la Profesora Elina Lockhart por facilitarnos la imagen de Juan Correa.

Anexo

Las formas de las señales en el tiempo

Decíamos más arriba que uno de los objetivos del presente trabajo es realizarlo con materiales accesibles. Los multímetros utilizados miden los valores RMS de la señal que ingresa a condición de que su forma sea sinusoidal. Para determinar la cercanía de la hipótesis referida a la forma en que varían en el tiempo los voltajes, medimos utilizando osciloscopio e interface. En la figura A se muestra los resultados experimentales de la medida de V_p cuando se conecta el primario a la fuente con salida marcada en 6V. Se superpone un ajuste sinusoidal.

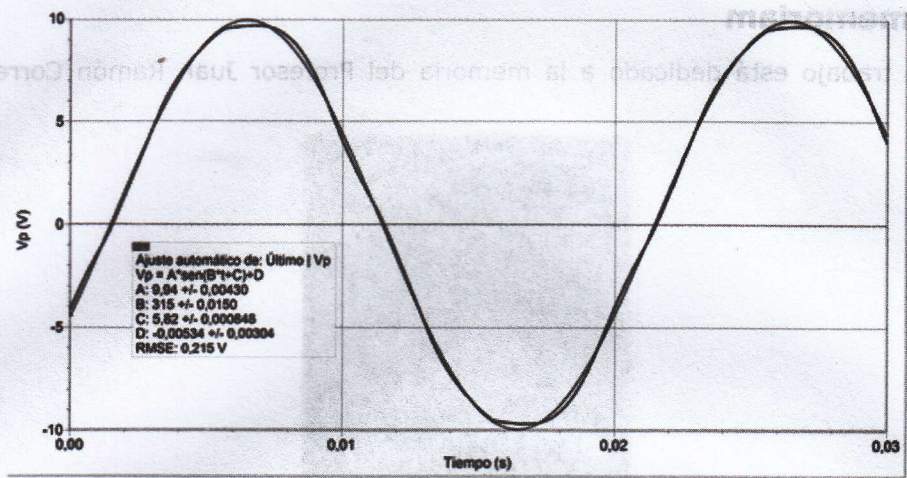


Figura A. Forma del voltaje en bornes del primario en el tiempo.

La comparación entre el ajuste y los datos experimentales acusa discrepancias especialmente en los valores cercanos al pico. A partir del valor del parámetro A del ajuste se puede estimar el valor eficaz del voltaje:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{9,94 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 7,03 \text{ V}$$
 El multímetro utilizado acusa un valor eficaz de $V_p = 7,02 \text{ V}$.

SOLUCIONES AL PROBLEMA DE MEDIR ACELERACIONES USANDO UN TELÉFONO INTELIGENTE: ENFRENTANDO A LA RELATIVIDAD GENERAL

Martín Monteiro¹ - **Cecilia Cabeza**² - **Arturo C. Martí**³

¹ Universidad ORT Uruguay; monteiro@ort.edu.uy

² Instituto de Física Facultad de Ciencias Universidad de la República, Uruguay; cecilia@fisica.edu.uy

³ Instituto de Física Facultad de Ciencias Universidad de la República, Uruguay; marti@fisica.edu.uy

Resumen

Los sensores de aceleración disponibles en *smartphones*, *ipads*, o *tablets* son frecuentemente empleados en laboratorios de enseñanza de la Física. Cuando el dispositivo se encuentra acelerado, estos acelerómetros, en lugar de una aceleración absoluta, reportan una aceleración aparente. En general, debido a las limitaciones impuestas por el principio de equivalencia, no es posible en un sistema aislado discernir entre un campo gravitatorio y un sistema de referencia no inercial acelerado. En este trabajo se muestra utilizando un péndulo físico, cómo obtener el ángulo de giro y la aceleración absoluta a partir de las medidas obtenidas por medio del acelerómetro y del giroscopio. Se discuten las limitaciones de los diferentes sensores presentes en estos dispositivos. Los resultados obtenidos son corroborados por medio del análisis de vídeos.

1. Planteamiento del problema

El uso de teléfonos inteligentes y otros dispositivos similares se ha extendido vertiginosamente en los últimos años en todo el mundo. El empleo de estos dispositivos ha trascendido más allá de los ámbitos para los cuáles estaban inicialmente dirigidos. En efecto, esta revolución impactó también en los laboratorios de enseñanza donde diversas experiencias se ven facilitadas por el uso de los sensores con los que habitualmente cuentan estos dispositivos. Recientemente, en varios artículos, el empleo de teléfonos inteligentes ha sido propuesto en varias experiencias que abarcan temáticas de mecánica [1-5], electromagnetismo [6-7], óptica [8], oscilaciones [9-10] y ondas [11-12] entre otras.

Varios de los trabajos citados anteriormente se centran en experiencias de mecánica, más específicamente, en la medida de la aceleración gravitatoria [13], en la energía elástica o en el estudio de péndulos simple [14], físico, elástico [15] y de torsión. En un trabajo reciente [16], se estudia la conservación del momento angular utilizando el sensor de rotación o giroscopio

de un smartphone montado en una mesa rotatoria. El sensor de rotación también ha sido utilizado para calcular la energía cinética de rotación de un péndulo físico [17].

Un paso adelante en el aprovechamiento de estos dispositivos se presenta con la posibilidad de emplear simultáneamente los sensores de aceleración y rotación. En un trabajo se reporta una experiencia en la cual se coloca un smartphone en una calesita a diferentes distancias del centro de rotación [18]. A partir de las medidas de los sensores se obtiene la aceleración centrípeta y la velocidad angular y gracias a una regresión lineal se relacionan las medidas con el radio de giro del dispositivo. Siguiendo esta línea de uso simultáneo de los sensores de aceleración y rotación, en otro trabajo también reciente [19, 20] los autores estudian un péndulo físico. En la experiencia planteada un teléfono inteligente se fija en la parte exterior de una rueda de bicicleta y se pone en movimiento tanto en régimen de rotación (dando vueltas completas en una dirección) como de oscilación (alrededor del punto de equilibrio estable) ya sea de pequeñas o de grandes amplitudes. Gracias a los sensores se obtienen medidas de aceleración y velocidad angular según diferentes ejes solidarios con el teléfono. Esta medida simultánea permite, en el caso relativamente sencillo de un sistema con un grado de libertad, la obtención de la coordenada generalizada y su momento conjugado y por consiguiente es posible representar trayectorias en el espacio de fases. Este último concepto, más bien abstracto, se vuelve de esta forma más tangible.

Un aspecto importante que ha recibido escasa atención proviene del hecho que los sensores de aceleración, cuando el dispositivo se encuentra en un sistema acelerado, miden de hecho una aceleración *aparente*. La obtención de la aceleración absoluta o *real* (referida al sistema de laboratorio) no es trivial pues debido a limitaciones impuestas por el *principio de equivalencia* no siempre es posible discernir entre un sistema sometido a un campo gravitatorio y un sistema no inercial acelerado. En este trabajo se obtiene la aceleración real, medida en el sistema de laboratorio, y el ángulo de giro del smartphone a partir de las medidas de los sensores de aceleración y de giro. El procedimiento propuesto tiene la restricción que el sistema se mueve en un plano con 1 grado de libertad. Los resultados obtenidos con el smartphone se contrastan con medidas independientes realizadas a partir del análisis de vídeos. Dado que el uso de los sensores de los smartphones se está extendiendo en los laboratorios de enseñanza, este trabajo busca brindar un aporte orientado hacia el mejor aprovechamiento de este recurso por parte de estudiantes y profesores.

2. Montaje experimental: péndulo físico y sensores

Un péndulo físico se define como un cuerpo rígido que gira en un plano alrededor de un eje horizontal bajo el efecto de la fuerza de la gravedad. En esta experiencia el péndulo físico está constituido por una rueda de bicicleta con su eje horizontal y fijo y que puede girar libremente en un plano vertical y un smartphone montado en la periferia de la rueda como muestra la Fig. 1. Se utilizó un smartphone con sistema Android (LG G2 D805) con sensores LGE STMicroelectronics: 3-axis acelerómetro, precisión $0,001 \text{ m/s}^2$, 3-axis giroscopio, precisión $0,001 \text{ rad/s}$. La localización

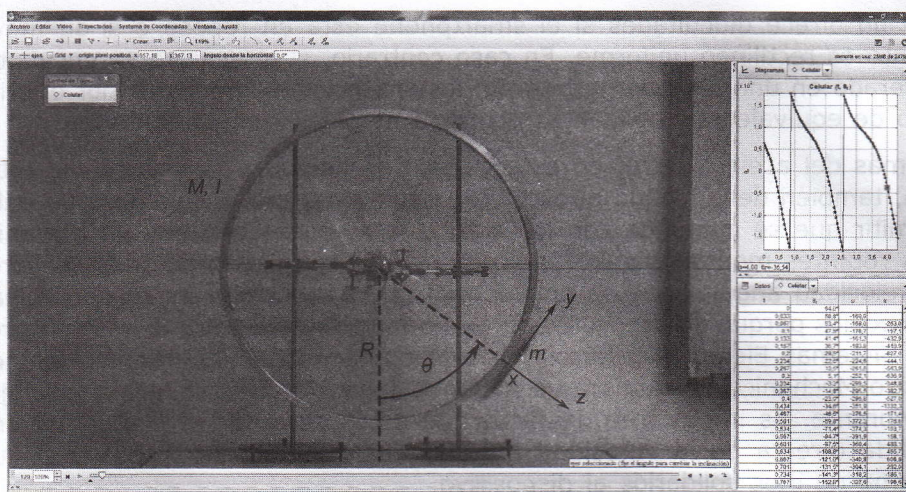


Figura 1. Dispositivo experimental formado por una rueda de bicicleta con su eje horizontal fijo y un smartphone. Se indican también las coordenadas utilizadas. La imagen es una captura de pantalla del análisis de video realizado con Traker.

precisa de los sensores dentro del smartphone fue obtenida a partir de las información técnica provista por el fabricante y verificada por métodos físicos [19]. Como aplicación para registrar los valores medidos por los sensores se escogió Androsensor [22].

Para aprovechar adecuadamente las posibilidades que brindan estos dispositivos es necesario entender los aspectos fundamentales de su funcionamiento. Los sensores de aceleración disponibles son en realidad, debido a su construcción, sensores de fuerza [1, 21, 23]. Estos sensores miden la fuerza normal ejercida sobre una partícula de prueba (o *partícula sísmica*) por una cerámica piezoeléctrica o un capacitor micro-mecanizado como se muestra en el esquema de la figura 2. Por este motivo, cuando se quiere obtener la aceleración real del dispositivo se debe restar el término gravitatorio ($m\vec{g}$) de acuerdo a lo indicado en la figura 2. Esta transforma-

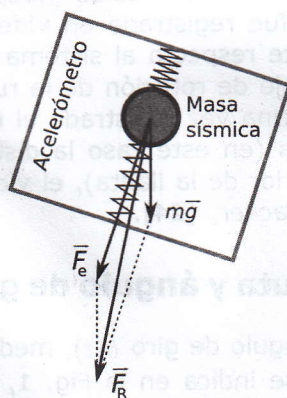


Figura 2. Esquema de un sensor de aceleración, se muestra una partícula de prueba o sísmica y las fuerzas elástica, $\vec{F}_e$, y gravitatoria, $m\vec{g}$, y la resultante de ambas $\vec{F}_R$ ejercidas sobre la misma.

ción no ofrece dificultades si el smartphone está en reposo o si su movimiento es rectilíneo uniforme. En caso contrario, si el aparato se encuentra acelerado en una dirección arbitraria, las limitaciones impuestas por el principio de equivalencia, obligan a recurrir a medidas complementarias.

Además del acelerómetro, en este trabajo se hará uso del sensor de rotación, también denominado giroscopio o sensor de giro. Su nombre no debe permitir que se confunda con los clásicos giróscopos basados en mecanismos rotantes montados sobre soportes cardánicos. Los modernos sensores de velocidad angular que se encuentran en los smartphones se denominan giroscopios porque son sensores de giro o medidores de giro. Estos sensores son Sistemas Electro-Mecánicos Micro-Maquinados (MEMS -Micro-machined Electro-Mechanical Systems) que miden la fuerza de Coriolis sobre un objeto vibrante. Es importante destacar que estos sensores proporcionan una medida directa de la velocidad angular del dispositivo expresada en un sistema de ejes solidarios al dispositivo.

En muchos modelos de smartphones están presentes también dos pseudosensores: de orientación y de aceleración lineal. Este último pretende medir la aceleración del dispositivo excluyendo el efecto de la gravedad. El pseudosensor de orientación por su lado integra información de diversos sensores, incluyendo el campo magnético terrestre, para dar una medida de la orientación del dispositivo. A lo largo de este trabajo, se comparan los resultados obtenidos con las medidas de estos pseudosensores y se discuten las limitaciones de los mismos.

Habitualmente los sensores miden todas las componentes de las magnitudes vectoriales según 3 ejes, x, y, z orientados como si estuvieran *dibujados* sobre la pantalla del celular. Las medidas que se emplean en este trabajo son las del sensor de rotación según el eje x y los de la aceleración según los ejes y y z , que se corresponden con las aceleraciones tangencial y radial respectivamente. Una vez registrados los datos es posible descargarlos en una computadora y analizarlos utilizando un programa apropiado.

Con el propósito de contar con una medida independiente del movimiento del sistema, la experiencia fue registrada en vídeo. Se colocó una cámara digital orientada frontalmente respecto al sistema y con el centro del campo focal coincidente con el eje de rotación de la rueda de forma de minimizar los errores de paralaje. Una vez registrado el movimiento y usando una escala de longitud apropiada (en este caso la distancia desde el centro de la rueda hasta el borde interior de la llanta), el vídeo fue analizado utilizando el conocido programa *Tracker*, [24].

3. Aceleración absoluta y ángulo de giro

La evolución temporal del ángulo de giro $\theta(t)$, medida a partir de la posición de equilibrio estable como se indica en la Fig. 1, se obtiene a partir de la Segunda Ley de Newton. Despreciando el rozamiento, la ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$-mg R \sin\theta = I \ddot{\theta} \quad (1)$$

donde m es la masa del celular, R es la distancia al centro de masa, e I es el momento de inercia del sistema compuesto por la rueda y el smartphone. La aceleración del celular en el sistema de laboratorio es

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \hat{r} + R \ddot{\theta} \hat{\theta} \quad (2)$$

donde R es la distancia del centro de rotación al centro de masa del celular localizado muy próximo a los sensores. Los versores polares elegidos coinciden con los ejes del celular: el versor radial con el eje z ($\hat{r} = \hat{z}$) y el versor tangencial con el eje y ($\hat{\theta} = \hat{y}$). El sensor giroscópico del eje x , mide la velocidad angular en ese eje de forma directa [23], por lo que

$$\omega_x = -\dot{\theta} \quad (3)$$

donde el signo se debe a la orientación de los ejes. Observar que en el esquema de la figura 1, el eje x es entrante mientras que el sentido de rotación está dado por el eje y , que en este caso es positivo (antihorario).

La aceleración medida por el sensor de aceleración, en cambio, no es una medida de la aceleración *real* observada desde el laboratorio sino que es una aceleración *aparente*, $\vec{a}'$, resultando de la suma vectorial de la aceleración real y la aceleración producida por un campo gravitatorio dirigido en sentido opuesto al real

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{g} \quad (4)$$

Las componentes de la aceleración aparente medidas por los sensores según los ejes y y z del smartphone son

$$a'_y = R\ddot{\theta} + g \sin\theta \quad (5)$$

$$a'_z = -R\dot{\theta}^2 - g \cos\theta \quad (6)$$

De las ecuaciones (2), (3) y (6) se tiene una de las proyecciones de la posición en función de las medidas del celular:

$$\cos(\theta) = -\frac{a'_z + R\omega_x^2}{g} \quad (7)$$

Mientras que de la otra proyección de las ecuaciones (1), (2) y (5) se obtiene

$$\sin(\theta) = -\frac{a'_y}{g \left(1 - \frac{m R^2}{I} \right)} \quad (8)$$

De este modo, utilizando conjuntamente las ecuaciones (7) y (8), es posible decodificar la coordenada generalizada del sistema.

Vale la pena observar que el divisor de la ecuación (8) es siempre positivo dado que el momento de inercia de un sistema (rueda y smartphone) es

siempre mayor que el momento de inercia de una de sus partes, $I > mR^2$. El caso límite de la igualdad, $I = mR^2$, correspondería a un péndulo simple, y la ecuación (8) evidentemente quedaría indeterminada, lo cual no es de extrañar pues solo es válida para el péndulo físico.

4. Resultados

Para analizar la dinámica del sistema, el péndulo físico se puso en movimiento con una energía suficiente para que diese vueltas completas en un sentido. El movimiento fue registrado usando tanto los sensores del smartphone como la cámara de vídeo. En la figura 3 observamos la evolución temporal del ángulo de giro calculado tanto a partir de las ecs. (7) y (8), como el obtenido por medio del análisis de vídeo por medio del *Tracker*. También se incluye una tercera medida obtenida por

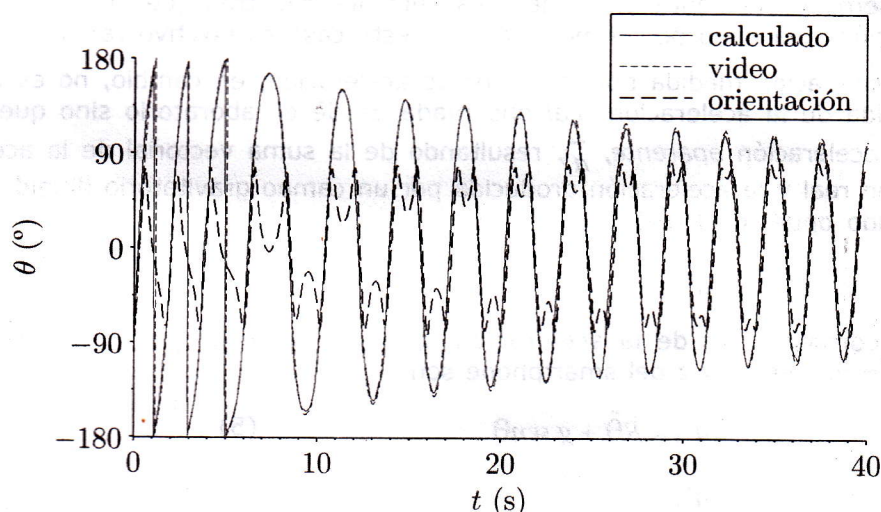


Figura 3. Evolución temporal del ángulo de giro. Se muestra el ángulo obtenido por medio de las Ecs. (7) y (8), por medio de los vídeos y el reportado por el pseudosensor de orientación.

medio del pseudosensor de orientación. Se puede concluir de esta gráfica que el procedimiento descrito en la sección anterior concuerda con las medidas obtenidas por el análisis de vídeo a lo largo de toda la realización. Asimismo, las medidas obtenidas por el sensor de orientación concuerdan con los resultados solamente si el ángulo es menor que 90° . Eso es una consecuencia de la forma peculiar en que están diseñado el pseudosensor de orientación.

La velocidad y la aceleración angular en función del tiempo obtenidas tanto por el sensor de rotación y por medio del análisis de vídeo se muestra en la figura 4. En el caso del giroscopio, la velocidad angular se obtiene directamente del sensor mientras que en el análisis de vídeo se obtiene por medio de la derivada numérica del ángulo. Las aceleraciones angulares obtenidas en esta figura corroboran en general la excelente concordancia entre ambos procedimientos. Sin embargo, debido a la derivada numérica y a que el tiempo de muestreo de la cámara digital y

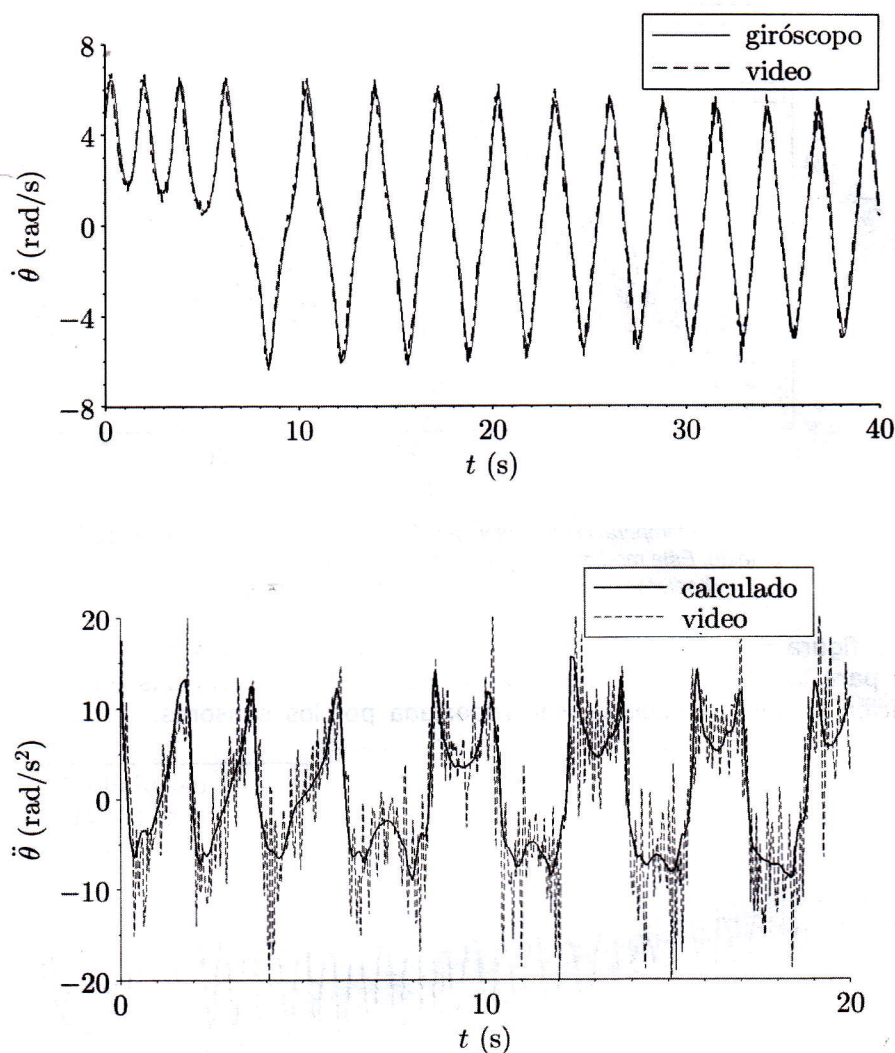


Figura 4. Comparación de las medidas del giroscopio y el análisis de video. Evolución temporal de la velocidad angular (arriba) y de la aceleración angular (abajo).

la localización del objeto en cada cuadro no es tan precisa, la velocidad angular y especialmente la aceleración angular obtenida por medio de los videos presenta más ruido que las obtenidas con el sensor de giro.

Las dos componentes de la aceleración se muestran en las figuras 5 y 6. Se comparan las aceleraciones, radial y tangencial, determinadas a partir de las ecuaciones calculadas en la sección anterior, con la medida del pseudosensor de aceleración lineal y la aceleración aparente. En la figura 5 se muestra la evolución de la aceleración tangencial. Como era de esperar, la aceleración aparente difiere claramente de la aceleración absoluta calculada por el procedimiento descrito en la sección anterior. Por otro lado, el pseudosensor de aceleración lineal reporta resultados también incorrectos, especialmente cuando el celular se mueve cerca del punto de equilibrio inestable.

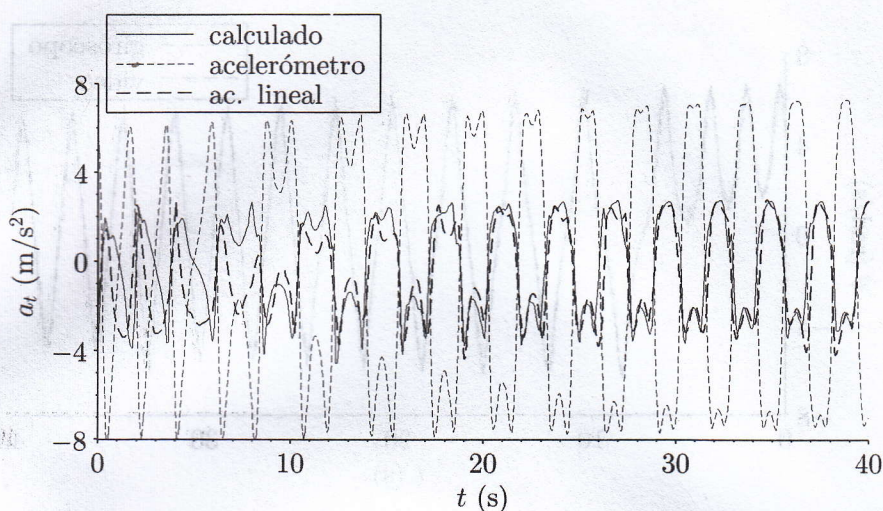


Figura 5. Evolución temporal de la aceleración tangencial calculada por el procedimiento descrito en el texto. Esta medida se compara con las reportadas, ambas incorrectas, por el acelerómetro y el acelerómetro lineal del smartphone.

En la figura 6, se ilustra la aceleración radial en función del tiempo. Igual que para la aceleración tangencial se observan discrepancias entre la aceleración absoluta calculada y la reportada por los sensores.

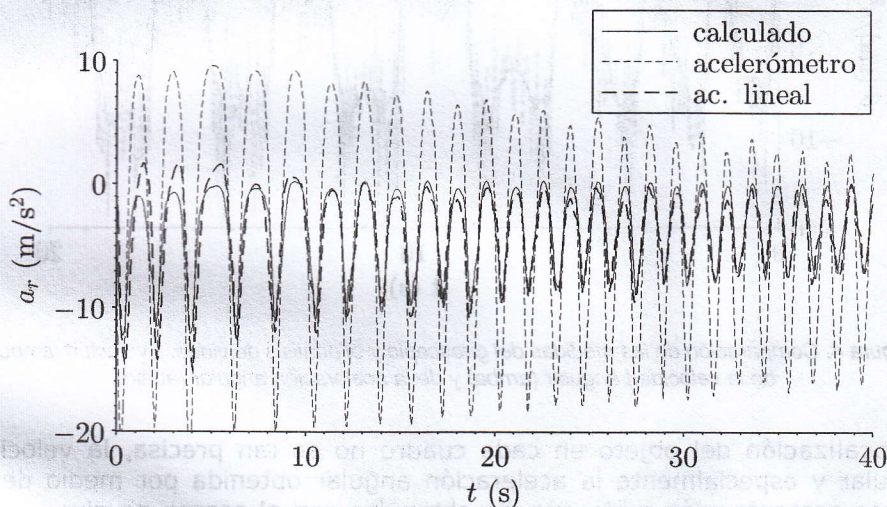


Figura 6. Comparación similar a la Fig. 5 para la aceleración radial.

5. Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se mostró como obtener el ángulo de giro y la aceleración real de un péndulo físico a partir de las medidas de los sensores de aceleración y rotación de un smartphone. Dada que el principio de equivalencia impone serias limitaciones a las medidas de aceleración hechas desde un sistema no inercial, la medida de la aceleración real debió ser complementada, además de las medidas del propio sensor de aceleración con medidas

del sensor de rotación. Para corroborar el procedimiento descrito se usó como medida independiente el análisis de vídeos de la experiencia.

Para concluir señalamos que el uso de sensores disponibles en los teléfonos inteligentes permite un espectro amplio de medidas aplicables que abarca un espectro muy amplio de temas de la Física. Se trata de un herramienta invaluable y esperamos que su uso se expanda aún más debido a su creciente disponibilidad y descenso en los costos. Sin embargo, la experiencia sugiere que es necesario comprender los aspectos básicos de su funcionamiento para lograr un aprovechamiento cabal de sus posibilidades.

Referencias:

- [1] Vogt, P., Kuhn, J., «Analyzing free fall with a smartphone acceleration sensor,» *The Physics Teacher*, 50(3), 182-183, (2012).
- [2] Chevrier, J., Madani, L., Ledenmat, S., Bsiesy, A., «Teaching classical mechanics using smartphones,» *The Physics Teacher*, 51(6), 376-377, (2013).
- [3] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., «Con la Física a todas partes: experiencias utilizando el teléfono inteligente,» *Educación en Física(A.P.F.U.)*, 8(4), 17-26, (2014).
- [4] Streepey, J. W., «Using iPads to illustrate the impulse-momentum relationship,» *The Physics Teacher*, 51(1), 54-55, (2013).
- [5] Castro-Palacio, J. C., Velazquez, L., Gómez-Tejedor, J. A., Manjón, F. J., Monsoriu, J. A., «Using a smartphone acceleration sensor to study uniform and uniformly accelerated circular motions,» *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36(2), 2315, (2014).
- [6] Silva, N., «Magnetic field sensor,» *The Physics Teacher*, 50(6), 372-373, (2012).
- [7] Forinash, K., Wisman, R. F., «Smartphones as portable oscilloscopes for physics labs,» *The Physics Teacher*, 50(4), 242-243, (2012).
- [8] Thoms, L. J., Colicchia, G., Girwidz, R., «Color reproduction with a smartphone,» *The Physics Teacher*, 51(7), 440-441, (2013).
- [9] Castro-Palacio, J. C., Velázquez-Abad, L., Giménez, M. H., Monsoriu, J. A., «Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations,» *American Journal of Physics*, 81(6), 472-475, (2013).
- [10] Sans, J. A., Manjón, F. J., Pereira, A. L. J., Gómez-Tejedor, J. A., Monsoriu, J. A., «Oscillations studied with the smartphone ambient light sensor,» *European Journal of Physics*, 34(6), 1349, (2013).
- [11] Parolin, S. O., Pezzi, G., «Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures,» *The Physics Teacher*, 51(8), 508-509, (2013).
- [12] Kuhn, J., Vogt, P., «Analyzing acoustic phenomena with a smartphone microphone» *The Physics Teacher*, 51(2), 118-119, (2013).
- [13] Kuhn, J., Vogt, P., «Smartphones as experimental tools: Different methods to determine the gravitational acceleration in classroom

- physics by using everyday devices,» European J of Physics Education, 4(1), 16, (2013).
- [14] Vogt, P., Kasper, L. and Burde, J-P., «The sound of church bells: Tracking down the secret of a traditional arts and crafts trade,» The Physics Teacher, 53(8), 438-439, (2015).
- [15] Kuhn, J., Vogt, P., «Analyzing spring pendulum phenomena with a smart-phone acceleration sensor,» The Physics Teacher, 50(8), 504-505, (2012).
- [16] Shakur, A., Sinatra, T. «Angular momentum,» The Physics Teacher, 51(9), 564-565, (2013).
- [17] Monteiro, M., Cabeza, C., Marti, A. C., «Rotational energy in a physical pendulum» The Physics Teacher, 52(3), 180-181, (2014).
- [18] Monteiro, M., Cabeza, C., Marti, A. C., Vogt, P., Kuhn, J., «Angular velocity and centripetal acceleration relationship,» The Physics Teacher, 52(5), 312-313, (2014).
- [19] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., «Exploring phase space using smartphone acceleration and rotation sensors simultaneously,» European Journal of Physics, 35(4), 045013, (2014).
- [20] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., «Análisis del movimiento de un péndulo físico utilizando el teléfono inteligente,» Educación en Física (A.P.F.U.), 8(5), 37-43, (2015).
- [21] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., «Acceleration Measurements Using Smartphone Sensors: Dealing with the Equivalence Principle,» Revista Brasileira Ensino de Física, 37(1), 1303, (2015).
- [22] Google, <http://play.google.com>, last visited, (2016).
- [23] SensorWiki, <http://sensorwiki.org> , last visited, (2016).
- [24] D. Brown, Tracker: Herramienta de modelado y análisis de video para enseñanza de la física, <http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365> last visited, (2016).



*Un proyecto
editorial
al servicio de
estudiantes
y autores
uruguayos.*

**HISTORIA - MATEMÁTICA
LITERATURA - FILOSOFÍA
CIENCIAS SOCIALES - ECOLOGÍA
ADMINISTRACIÓN - DERECHO
FÍSICA - QUÍMICA**

Descuentos especiales
para docentes

Mercedes 1786 CP 11200 - Telefax: 2408 6985 - Montevideo, Uruguay
edideas@adinet.com.uy / www.editorialideas.com.uy



ONDAS LONGITUDINALES EN UN RESORTE VERTICAL SUSPENDIDO

Francisco Echegorri¹

¹ Profesor de Ondas y Óptica del Instituto de profesores Artigas, Montevideo, Uruguay. Profesor del Liceo Solymar 1, Canelones CES.

Artículo

Resumen

En un resorte vertical suspendido por su propio peso la tensión y la densidad lineal de masa no son homogéneas. Por este motivo, en comparación con un resorte horizontal, la dinámica es mucho más compleja. A pesar de esta complejidad, la dinámica presenta características muy peculiares como ser la simplicidad en la configuración de los modos normales y que el tiempo que demora un pulso en recorrer toda su extensión ida y vuelta es independiente de la longitud del resorte y de las condiciones en sus extremos. Además, sorprendentemente las frecuencias de los modos normales del resorte vertical (con sus dos extremos fijos) coinciden con las de un resorte horizontal. El presente trabajo desarrolla cuestiones que en la mayoría de los textos de nivel medio no son abordadas como ser la ecuación que rige las ondas en un resorte, la configuración y la distribución de masa de un slinky suspendido, los modos normales de oscilación y las frecuencias propias en diferentes configuraciones.

Palabras clave

Ondas longitudinales en resortes, modos normales de oscilación, configuración de un Slinky suspendido, centro de masa, estiramiento.

Introducción

Un resorte en posición vertical presenta en general una complicación adicional, ya que posee una densidad lineal de masa y una tensión variables, sin embargo está sujeto a la ecuación de ondas unidimensional usual, si suponemos que el mismo se comporta de forma lineal de acuerdo a la ley de Hooke. Las ondas longitudinales en un resorte para diferentes configuraciones pueden ser analizadas usando un modelo continuo y aplicando el análisis diferencial. La dinámica del sistema es entonces sorprendentemente simple dependiendo solamente de las diferentes condiciones de contorno. Las frecuencias de los modos normales de oscilación no se ven modificadas si el resorte está en posición vertical o en posición horizontal y resultan independientes de la longitud del resorte. La distancia entre los nodos de un resorte vertical fue determinada por *P. J. Ouseph* [9] y por *Casey Rutherford* [10].

Un problema interesante surge cuando el resorte se sustituye por un slinky colocado en posición vertical, la distancia entre los nodos deja de ser

homogénea debido a dos factores; la tensión del mismo es variable y la longitud natural así como la constante elástica del slinky es pequeña comparada con la de un resorte. Este aspecto ya ha sido estudiado por *Richard A. Young* [6] usando un modelo discreto. En nuestro trabajo analizamos los mismos aspectos usando un modelo continuo y obtenemos resultados que en general coinciden con el trabajo de *Young* [6] aunque presenta pequeñas diferencias debidas a la longitud natural no nula del slinky. La velocidad de un pulso que viaja por un slinky colgado en posición vertical presenta una característica muy interesante, el tiempo de tránsito «entre espiras» es constante, aunque la separación entre ellas es variable, por lo cual presenta una velocidad que cambia gradualmente, disminuyendo a medida que viaja desde la parte superior a la inferior. Como consecuencia del tiempo de tránsito constante, el tiempo que demora un pulso en recorrer dos veces toda la extensión del resorte es constante para una gran variedad de configuraciones. Los diferentes resultados de nuestro modelo fueron sometidos a una serie de experimentos comparando los mismos para un resorte y un slinky.

Ondas en un resorte vertical

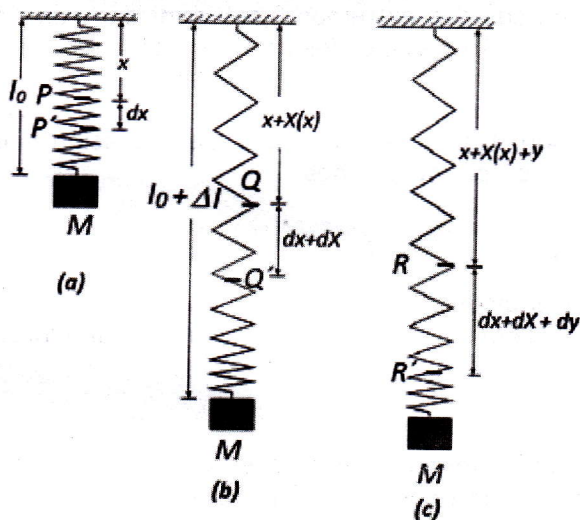


Figura 1. Diferentes configuraciones de un resorte vertical suspendido.

Consideremos las ondas de un resorte suspendido y que tiene una masa M en su extremo. Supongamos el resorte posee una masa no despreciable m .

Consideremos la vibración de la masa M para un resorte de constante elástica K , longitud natural l_0 y masa m . La densidad lineal de masa del resorte no estirado es:

$$\mu = \frac{m}{l_0} \quad (1)$$

Donde μ es la masa por unidad de longitud del resorte no estirado.

Consideremos el resorte en tres estados. En el estado (a) tenemos el resorte en su longitud natural (para el resorte en posición horizontal y no sometido a fuerza alguna). Cada punto del resorte queda determinado por su posición x . Consideremos también un elemento PP' de largo dx . En el estado (b) el resorte se encuentra en su posición de equilibrio. El elemento PP' está ahora desplazado a QQ' . P se desplaza $X(x)$ hacia abajo y P' se desplaza $X+dx$.

En el estado (c) supongamos la masa M está vibrando y el elemento QQ' se desplaza a la posición RR' . El desplazamiento de Q y Q' desde la posición de equilibrio es $y(x,t)$ y $y(x,t)+dy$. La longitud del nuevo elemento RR' es entonces $dx+dX+dy$. La masa del elemento QQ' o RR' es por supuesto la misma masa que PP' , o sea μdx .

Consideremos ahora la ecuación de movimiento de RR' . Las fuerzas que actúan son el peso y las dos tensiones en R y R' .

La tensión en R es de acuerdo a la Ley de Hooke:

$$T_R = kl_0 \frac{\text{estiramiento}}{\text{longitudinicial}}$$

$$T_R = kl_0 \frac{[(dx + dX + dy) - dx]}{dx}$$

$$T_R = kl_0 \left(\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) \quad (2)$$

La ecuación de movimiento de RR' es aplicando la segunda Ley de Newton:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mu dx g + T_{R'} - T_R$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = g + \frac{1}{\mu} \frac{(T_{R'} - T_R)}{dx}$$

Utilizando (2) tenemos:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = g + \frac{1}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} = g + \frac{kl_0}{\mu} \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

Esta ecuación de movimiento deberá satisfacer la solución $y(x,t)=0$ para todo instante t , ya que esta es la solución en la posición de equilibrio. Entonces:

$$0 = g + \frac{kl_0}{\mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \quad (4)$$

Restando ambas ecuaciones llegamos a la ecuación de movimiento de un elemento RR' del resorte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{kl_0}{\mu} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{kl_0^2}{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (5)$$

El resultado anterior es la ecuación de ondas unidimensional cuya velocidad de fase es:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0 \quad (6)$$

Para interpretar correctamente el resultado anterior debemos observar que la ecuación (5) está referida a la posición de cada espira en equilibrio para el resorte no estirado (figura 1 (a)) por lo tanto la velocidad de fase dada por la ecuación (6) no es la velocidad en que la fase se propaga referido a la variable $\xi = x + X(x)$ de cada punto del resorte en la posición de equilibrio (fig. 1 (b)).

Un análisis simple del resultado anterior puede hacerse expresando la variable continua x en función de una variable discreta n como sigue:

Consideremos el número de espiras n del resorte contenidos hasta la posición x o hasta la posición ξ , entonces la variable x estaría dada aproximadamente por¹:

$$x = \frac{l_0}{N} n \quad (7)$$

Siendo N el número total de espiras del resorte.

Luego la velocidad dada por la ecuación (6) puede expresarse en términos de la variable n ;

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l_0}{N} \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

Por lo que podemos concluir que la velocidad (número de espiras/s)

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \sqrt{\frac{k}{m}} N \quad (8)$$

es constante y por lo tanto el tiempo de tránsito del pulso en recorrer la

¹ Observemos que la variable x es una variable continua y n es discreta, por lo que la relación anterior es aproximadamente válida solo en el caso de que el número de espiras N sea grande. Por otro lado el número de espiras no se modifica al pasar de la configuración del resorte no estirado (fig 1 a) a la configuración de equilibrio del resorte estirado (fig 1 b).

distancia «entre espiras» es independiente de la separación entre las mismas e independiente de la posición ξ , dependiendo solamente de las propiedades del resorte, su constante elástica, su masa y el número total de espiras.

Por lo tanto la ecuación anterior presenta un resultado sorprendente, el tiempo que demora un pulso en recorrer dos veces toda su longitud (tiempo del viaje de ida y vuelta) es independiente de si el resorte esta estirado bajo su propio peso o si está estirado por una fuerza externa F (por lo tanto independiente de su longitud L) o por una masa unida a su extremo.

Dentro de los resultados experimentales vamos a mostrar lo anterior para un Slinky sometido a su propio peso. Cuando se envía un pulso desde el extremo fijo al extremo libre de un Slinky, dicho extremo permanece fijo un tiempo $T_{ida-vuelta}/2$, luego el extremo se desplaza rápidamente debido al impulso del pulso para luego permanecer en reposo un tiempo $T_{ida-vuelta}$ tiempo que demora el pulso en recorrer el camino de subida y de bajada al reflejarse en el extremo fijo, luego se desplaza rápidamente hacia arriba para permanecer nuevamente en reposo. Filmando lo anterior se puede medir fácilmente el tiempo $T_{ida-vuelta}$.

Cuando el pulso viaja por el resorte estirado, su velocidad es variable respecto de la posición ξ , (ya que el tiempo de tránsito *entre espiras* es constante y la separación entre ellas es variable debido a la tensión variable del resorte) sin embargo cuando el pulso llega al extremo del resorte estirado, la variable x toma el valor l_0 , por lo tanto demora en recorrer toda la longitud del resorte un tiempo $T_{ida-vuelta}/2$ dado por:

$$\frac{T_{ida-vuelta}}{2} = \frac{l_0}{v} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

También podemos observar que el tiempo que demora en recorrer la distancia entre dos espiras consecutivas (tiempo de tránsito entre espiras consecutivas) es de acuerdo a la ecuación (8):

$$\frac{\Delta t}{\Delta n} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} N \right)^{-1}$$

Luego el tiempo que demora en recorrer la longitud completa del resorte (N espiras) es:

$$\frac{T_{ida-vuelta}}{2} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} N \right)^{-1} N = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Luego el tiempo que demora un pulso en recorrer dos veces la longitud de un resorte o tiempo de ida y vuelta es:

$$T_{ida-vuelta} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9)$$

Dicho tiempo es independiente de la longitud del resorte aún cuando el resorte se encuentre estirado por su propio peso y la velocidad del pulso sea variable (es variable siempre que se encuentre en posición vertical y es constante cuando se encuentra en posición horizontal).

Posición de equilibrio de un resorte vertical suspendido y centro de masa

En esta sección vamos a estudiar la distribución de masa de un resorte suspendido por su propio peso o estirado mediante una fuerza externa constante F (o por una masa M en su extremo).

A partir de la ecuación (4) y recordando que $X(x)$ representa el estiramiento de los puntos del resorte en función de su posición x (medida para el resorte no estirado) y aplicando las condiciones de borde $X(0)=0$ (estiramiento cero para el extremo superior fijo del resorte) y $T(l_0)=F$ (tensión en el extremo del resorte igual a la fuerza externa F aplicada) tenemos:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{-g\mu}{kl_0} = \frac{-mg}{kl_0^2}$$

Integrando dos veces respecto de x tenemos:

$$X(x) = \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{x^2}{2} + Ax + B \quad (10)$$

Utilizando la ecuación (2) y considerando $y(x,t)=0$ para todo t (ya que el resorte está en su posición de equilibrio) tenemos:

$$\begin{aligned} T(l_0) &= kl_0 \frac{dX}{dx}(l_0) = F \\ \frac{dX}{dx}(l_0) &= \frac{F}{kl_0} \end{aligned} \quad (11)$$

La condición de extremo fijo para $x=0$ es:

$$X(0) = 0 \quad (12)$$

Sustituyendo en (10) llegamos a que $B=0$ luego aplicando la ecuación (11) tenemos:

$$\frac{dX}{dx}(l_0) = \frac{-mgl_0}{kl_0^2} + A = \frac{F}{kl_0} \quad (13)$$

Luego A vale:

$$A = \frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \quad (14)$$

Finalmente sustituyendo A y B en (10) obtenemos el estiramiento del resorte en función de la posición x de las espiras:

$$X(x) = \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) x \quad (15)$$

El estiramiento total del resorte $\Delta l = X(l_0)$ está dado entonces por:

$$X(l_0) = \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{l_0^2}{2} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) l_0 = \frac{mg}{2k} + \frac{F}{k}$$

$$\Delta l = X(l_0) = \frac{mg}{2k} + \frac{F}{k} \quad (16)$$

La longitud total de un resorte vertical suspendido y sometido en su extremo a una fuerza F está dado entonces por:

$$L = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{F}{k} \quad (17)$$

En el caso de que el resorte este sometido bajo su propio peso el estiramiento es:

$$\Delta l = \frac{mg}{2k} \quad (18)$$

Donde m es la masa del resorte y k es la constante elástica del mismo.

M. Sawicki [1] calculó el descenso del centro de masa del resorte cuando este pasa de la posición horizontal a la posición vertical (esto es el descenso de la espira central del slinky y por lo tanto no representa la posición del centro de masa del resorte ya que las espiras no están uniformemente distribuidas), en donde el resorte está sometido a su propio peso. Dicho

descenso se puede calcular a partir de la ecuación (15) para $x = \frac{l_0}{2}$ obteniendo²:

$$X(l_0/2) = \frac{3mg}{8k} = \frac{3}{4} \frac{mg}{2k} = \frac{3}{4} \Delta l \quad (19)$$

Posición del centro de masa del resorte suspendido

La posición del centro de masa de un resorte suspendido está dado por:

$$\xi_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^{l_0 + \Delta l} \xi dm$$

² Valor que coincide con el resultado obtenido por M. Sawicki [1] y verificado experimentalmente en un reciente trabajo de Terrence P. Toepker [2].

Donde $\xi = x + X(x)$ representa la posición de las espiras en equilibrio para un resorte estirado.

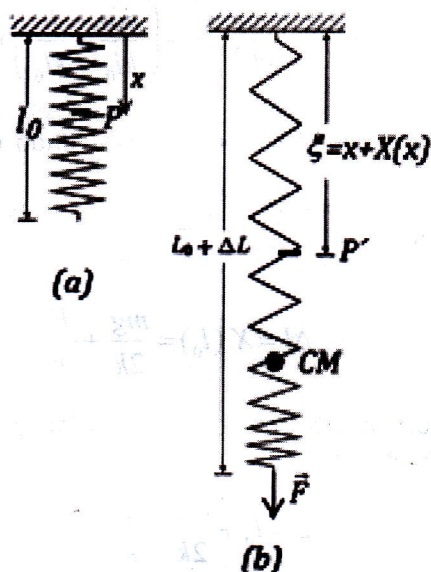


Figura 2. Diferentes configuraciones de un resorte donde se muestra la posición del centro de masa (CM) en el caso estático.

A partir de (15) tenemos que ξ está dado por:

$$\xi = x + X(x) = x + \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) x \quad (20)$$

$$\xi_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^{l_0} \left[x + \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) x \right] \mu dx$$

$$\xi_{CM} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{3k} + \frac{F}{2k} \quad (21)$$

En el caso que el resorte cuelgue verticalmente por su propio peso ($F=0$) la posición del centro de masa es³:

$$\xi_{CM} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{3k} = \frac{l_0}{2} + \frac{2}{3} \Delta l \quad (22)$$

Donde Δl es el estiramiento del resorte.

³ Dicho resultado coincide con el resultado obtenido por Newburgh and Andes [3] y por recientes trabajos de L. Ruby [4] y Juan D. Serna [5] y verificado experimentalmente por Terrence P. Toepker [2].

Resultados experimentales en el caso estático

Para analizar el estiramiento de las espiras se utilizó un Slinky de 40 espiras, de las cuales se utilizaron 24 espiras. La masa del slinky completo es de 174,65g y tiene una longitud natural de 10cm. Las 24 espiras tienen una masa $m=104,79\text{g}$, una longitud natural $l_0=6,0\text{cm}$ y una constante elástica $k=1,00\text{N/m}$ calculada a partir de la ecuación (18).

$$k = \frac{mg}{2\Delta l}$$

Donde $\Delta l=51,5\text{cm}$ es el estiramiento del extremo del resorte.

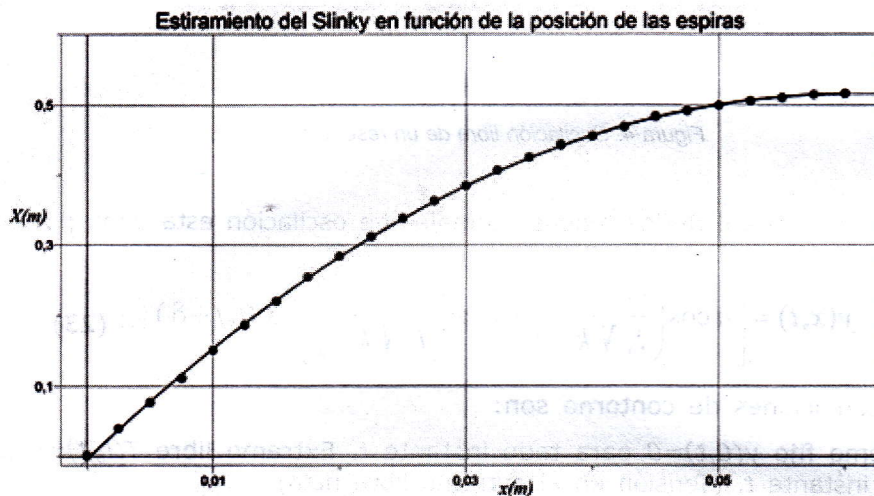


Figura 3. Estiramiento del Slinky en función de la posición de las espiras en el caso estático. La curva continua corresponde al ajuste teórico (ecuación 15).

En conclusión podemos observar que el resultado teórico concuerda muy bien con el ajuste de los datos experimentales.

Modos normales de oscilación de un resorte suspendido bajo su propio peso

En primer lugar vamos a estudiar los modos normales de oscilación de un resorte con un extremo fijo y el otro libre.

La ecuación de movimiento está dada por la ecuación (5):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Donde v está dado por:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0$$

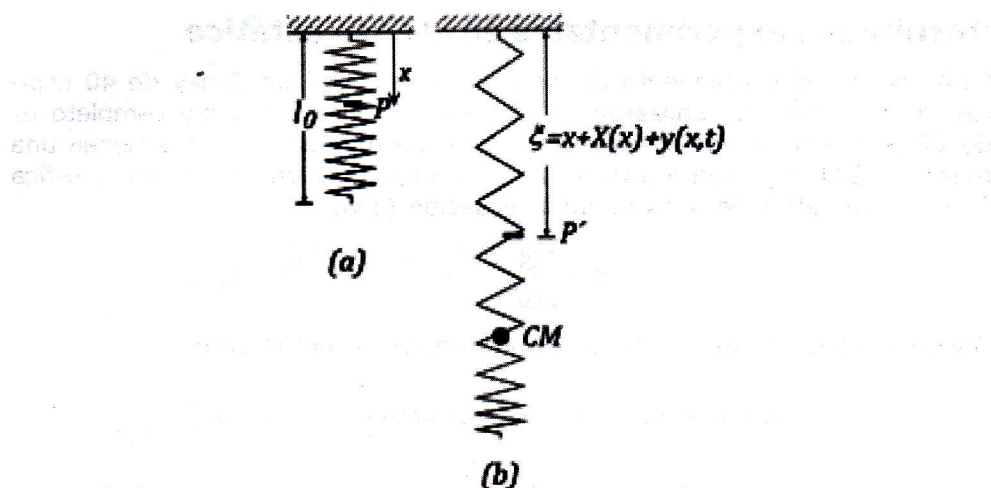


Figura 4. Oscilación libre de un resorte suspendido.

La solución usual de los modos normales de oscilación está dada por:

$$y(x, t) = \left[a \cos\left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} x\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} x\right) \right] \cos(\omega t + \delta) \quad (23)$$

Las condiciones de contorno son:

Extremo fijo $y(0, t) = 0$ para todo instante t . Extremo libre $T(l_0, t) = 0$ para todo instante t . (Tensión en el extremo libre nula)

La tensión está dada por la ecuación (2)

$$T_R = kl_0 \left(\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)$$

Para $x = l_0$ y usando la ecuación (12) para $F = 0$ tenemos:

$$\frac{dX}{dx}(l_0) = 0$$

Luego la condición de extremo libre es para todo instante t :

$$\frac{\partial y(l_0, t)}{\partial x} = 0$$

Aplicando las condiciones anteriores obtenemos:

$$y(0, t) = a \cos(\omega t + \delta) = 0 \quad \forall t$$

Para todo instante t , luego implica $a = 0$.

La condición de extremo libre es para todo instante t :

$$\frac{\partial y(l_0, t)}{\partial x} = \frac{b\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left(\frac{\omega \sqrt{\frac{m}{k}}}{l_0} l_0\right) \cos(\omega t + \delta) = 0$$

Por lo cual implica que:

$$\cos\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = 0$$

Por lo que se verifica:

$$\omega \sqrt{\frac{m}{k}} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,3,\dots \quad (24)$$

Las frecuencias propias de oscilación $f=\omega/2\pi$ están dadas entonces por⁴:

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(2n-1)\sqrt{\frac{k}{m}}}{4} = \frac{2n-1}{2T_{ida-vuelta}} \quad n=1,2,3,\dots \quad (25)$$

$$f_n = \frac{2n-1}{2T_{ida-vuelta}} \quad n=1,2,3,\dots$$

La posición de los nodos está dada por $y(x, t)=0$ para todo instante t . Luego tenemos:

$$y(x, t) = b \sin\left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} x\right) \cos(\omega t + \delta) = 0 \quad \forall t$$

Por lo tanto la posición de los nodos respecto de la variable x (relativa a la posición de las espiras del resorte no estirado) verifica la ecuación:

$$\sin\left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} x\right) = 0 \quad (26)$$

Luego utilizando la ecuación (24) tenemos:

$$(2n-1) \frac{\pi}{2l_0} x_i = i\pi \quad i=0,1,2,3,\dots$$

Luego la posición de los nodos está dado por:

⁴ Este resultado concuerda con el ya clásico trabajo de Richard A. Young [6].

$$x_i = \frac{2l_0 i}{2n-1} \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (27)$$

Luego el número de espiras entre nodos es de acuerdo a la ecuación (27) y la ecuación (7)

$$\Delta n = \frac{N}{l_0} \Delta x = \frac{N}{l_0} \frac{2l_0}{2n-1} = \frac{2N}{2n-1} \quad (28)$$

Por lo tanto el número de espiras entre nodos es constante, aunque la separación entre los mismos no lo es.

La posición de los nodos respecto de la variable $\xi = x + X(x)$ se puede hallar usando la ecuación (15) con $F=0$ (ya que el extremo del resorte no está sometido a fuerza alguna). Luego tenemos:

$$\xi_i = x_i + X(x_i) = \frac{2l_0 i}{2n-1} + \frac{mg}{kl_0} \left(\frac{2l_0 i}{2n-1} \right) - \frac{mg}{2kl_0^2} \left(\frac{2l_0 i}{2n-1} \right)^2$$

$$\xi_i = \frac{2i}{2n-1} \left[l_0 + \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{i}{2n-1} \right) \right] \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (28)$$

$$\xi_i = \frac{2i}{2n-1} \left[l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{2i}{2n-1} \right) \right] \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (29)$$

$$\xi_i = \frac{2i}{2n-1} \left[L + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{2i}{2n-1} \right) \right] \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (30)$$

Donde L es la longitud total del resorte (ecuación (17)), m es su masa y k es su constante elástica.

Consideremos ahora las oscilaciones de un resorte suspendido pero que posee sus dos extremos fijos. En este caso las condiciones de contorno son:

Extremo fijo para $x=0$

$$y(0,t)=0 \quad \forall t$$

Extremo fijo para $x=l_0$

$$y(l_0,t)=0 \quad \forall t$$

Utilizando la ecuación estándar para los modos normales de oscilación (ecuación (23)) obtenemos $a=0$ y

$$\sin \left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} l_0 \right) = 0$$

Por lo tanto las frecuencias angulares de oscilación verifican:

$$\omega \sqrt{\frac{m}{k}} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Las frecuencias de los modos normales de oscilación son entonces $f = \omega/2\pi$:⁵

$$f_n = n \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

$$f_n = \frac{n}{2\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{n}{T_{ida-vuelta}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Dichas frecuencias son independientes de la fuerza externa aplicada F y por lo tanto independientes de la longitud del resorte. (Ecuación (17))

$$L = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{F}{k}$$

La posición de los nodos se obtiene a partir de la ecuación (26) y la ecuación (31)

$$\frac{n\pi}{l_0} x = i\pi \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Luego la posición del i ésimo nodo respecto de la variable x está dada por la ecuación:

$$x_i = \frac{il_0}{n} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

El número de espiras entre dos nodos está dado como vimos a partir de la ecuación (7) y la ecuación (34) obteniéndose:

$$\Delta n = \frac{N}{l_0} \Delta x = \frac{N}{l_0} \frac{l_0}{n} = \frac{N}{n} \quad (35)$$

Por lo cual, igual que en el caso de un resorte con un extremo fijo y el otro libre, el número de espiras entre nodos es constante (aunque la separación entre nodos no lo sea).

La posición del i ésimo nodo respecto de la variable $\xi = x + X(x)$ se puede hallar usando la ecuación (15)

$$\xi_i = x_i + X(x_i) = \frac{il_0}{n} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) \left(\frac{il_0}{n} \right) - \frac{mg}{2kl_0^2} \left(\frac{il_0}{n} \right)^2$$

⁵ Ver referencia [6].

$$\xi_i = \frac{i}{n} \left[l_0 + \frac{F}{k} + \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{i}{2n} \right) \right] \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

$$\xi_i = \frac{i}{n} \left[l_0 + \frac{F}{k} + \frac{mg}{2k} + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right] \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

$$\xi_i = \frac{i}{n} \left[L + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right] \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Donde L es la longitud total del resorte (sometido a una fuerza F en el extremo), m es la masa del mismo y k es su constante elástica.

Patrones de Ondas estacionarias para un Slinky con un extremo libre

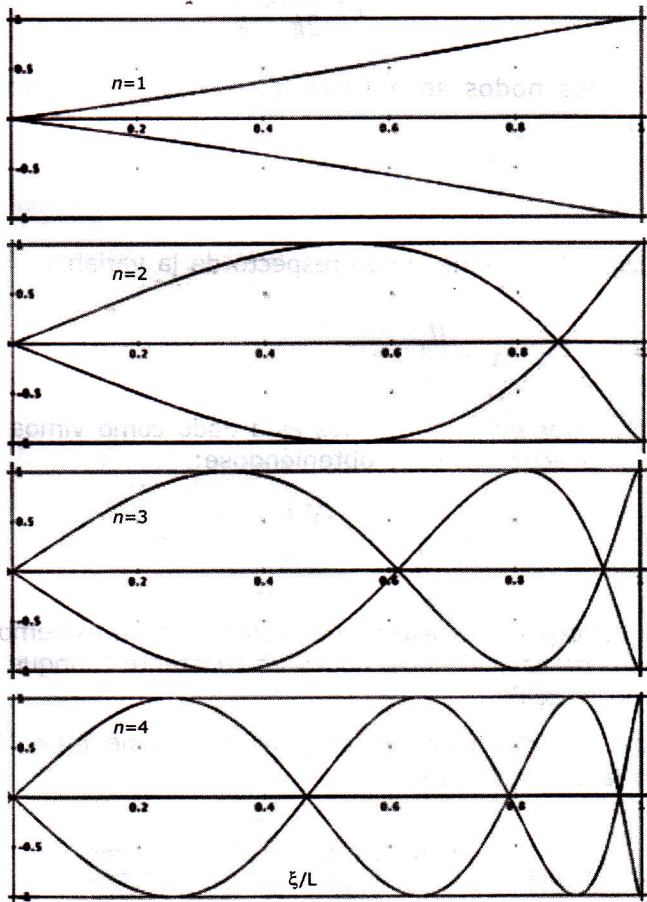


Figura 5. Grafica de la amplitud de cada modo en función de la posición ξ/L de las espiras para el Slinky estirado en equilibrio, n representa el número del modo normal.

A partir de la ecuación (15):

$$\xi = x + X(x) = x + \frac{-mg}{kl_0^2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{mg}{kl_0} + \frac{F}{kl_0} \right) x$$

Se despejó x en función de ξ , la ecuación obtenida es:

$$x = \frac{kl_0^2}{mg} + l_0 - \sqrt{\left(\frac{kl_0^2}{mg} + l_0 \right)^2 - 2 \frac{kl_0^2}{mg} \xi}$$

Luego se sustituyó en la expresión de la amplitud de los modos normales de oscilación:

$$y = \sin \left(\frac{\omega}{l_0} \sqrt{\frac{m}{k}} x \right)$$

Para las distintas frecuencias de los modos normales que verifican la ecuación (24)

$$\omega \sqrt{\frac{m}{k}} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,3,\dots$$

De esa forma podemos ver como varía la amplitud (normalizada) de la vibración longitudinal de cada punto del resorte en función de la posición de las espiras en equilibrio.

Resultados experimentales en el caso dinámico

Utilizando un resorte de constante elástica $k=13,65\text{N/m}$, longitud natural $l_0=64,5\text{cm}$ y masa $m=161,7\text{g}$ se lo forzó cerca del extremo fijo usando un parlante conectado a un generador de funciones. El resorte se encontraba en posición vertical. Con dicho dispositivo se determinaron las frecuencias de resonancia y la posición de los nodos en el caso de extremo libre y de los dos extremos fijos.

Las frecuencias de resonancia se resumen en los gráficos siguientes:

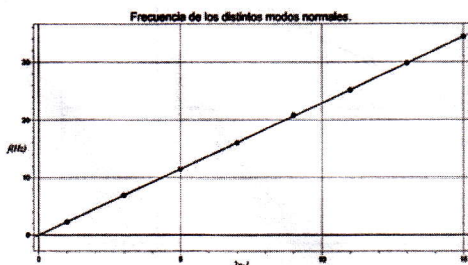


Figura 6. Frecuencias de resonancia de un resorte con un extremo fijo y el otro libre.

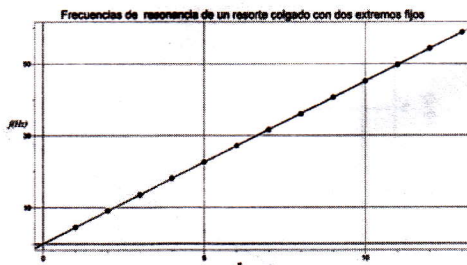


Figura 7. Frecuencias de resonancia con dos extremos fijos.

La posición de los nodos teórica (ecuación (30)) se comparó con la posición hallada experimentalmente. Los resultados se resumen en el gráfico siguiente:

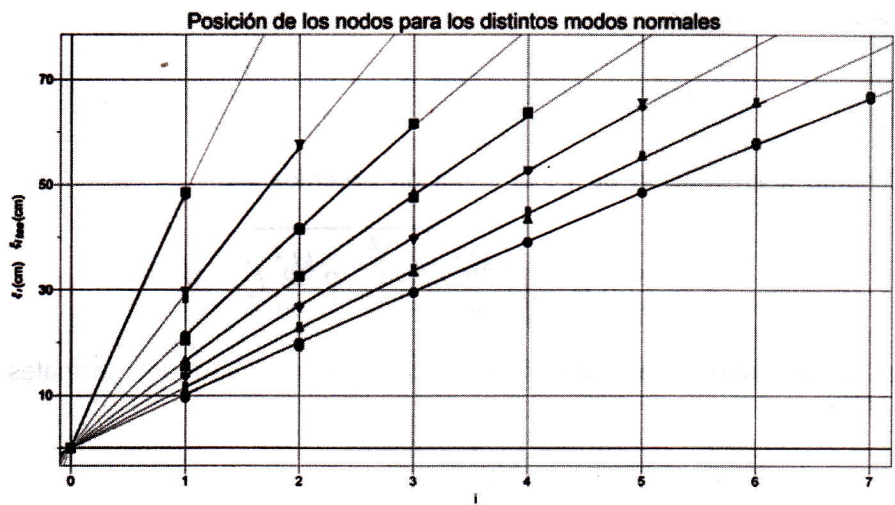


Figura 8. Posición de los nodos para los distintos modos normales (para $n=1$ hasta $n=8$) en función del número de nodo (desde $i=0$ hasta $i=7$). La curva continua es la ecuación teórica, ecuación (30).

En el gráfico se aprecia que la distancia entre nodos es aproximadamente constante (las curvas teóricas son aproximadamente rectas) ya que la tensión a lo largo del resorte es aproximadamente constante y el peso del resorte es pequeño comparado con esta.

Resultados experimentales para un Slinky

Para analizar los modos normales de oscilación y las frecuencias naturales se utilizó un Slinky de plástico de 40 espiras y 10cm de longitud natural. Se lo suspendió dejando 36 espiras libres con una masa de 157,2g y una longitud natural de 9,0cm. Se lo forzó mediante un forzador mecánico conectado a un generador de funciones de frecuencia variable.

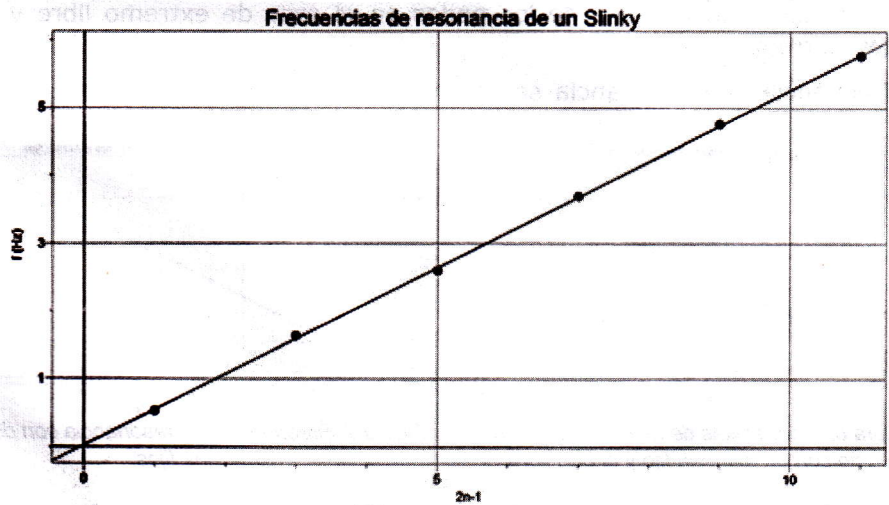


Figura 9. Frecuencias de resonancia para un Slinky con un extremo fijo y el otro libre.

La constante elástica se determinó a partir del estiramiento usando la ecuación (18):

$$k = \frac{mg}{2\Delta l} = \frac{0,1572\text{kg} \times 9,8\text{m/s}^2}{2 \times 1,205\text{m}} = 0,639\text{N/m}$$

Se graficaron las frecuencias de resonancia en función de $2n-1$ obteniéndose una recta de pendiente $f_1=0,523\text{Hz}$. Por lo cual las frecuencias de los distintos modos son múltiplos impares de la frecuencia fundamental.

El valor teórico está dado por la ecuación (25) obteniéndose $f_1=0,504\text{Hz}$.

La posición de los nodos teórica (ecuación (30)) se graficó al igual que para el resorte con la posición hallada experimentalmente obteniéndose la siguiente gráfica:

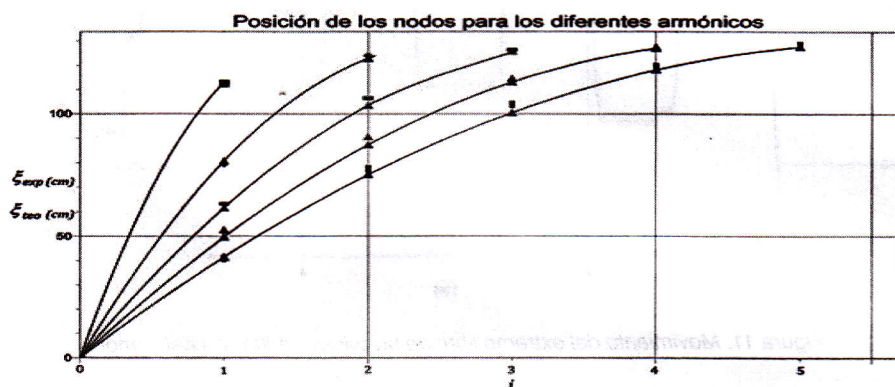


Figura 10. Posición de los nodos para los distintos modos normales (para $n=1$ hasta $n=5$) en función del número de nodo i (desde $i=0$ hasta $i=5$) la curva continua es la curva teórica (ecuación (30)) y los puntos son los datos experimentales.

A partir del gráfico se puede apreciar que existe una diferencia notable entre un resorte y un Slinky. Las curvas teóricas para un resorte se aproximan a rectas, estando los nodos igualmente espaciados, en cambio para un Slinky los nodos no están igualmente espaciados como se puede apreciar en la figura 10.

Medida del tiempo de ida y vuelta de un pulso en un Slinky

Para el Slinky mencionado anteriormente suspendido verticalmente, se envió un pulso y se filmó y analizó mediante el software Tracker el movimiento del extremo del mismo.

En la gráfica se puede apreciar que el extremo permanece fijo hasta que es alcanzado por el pulso, para luego permanecer fijo nuevamente durante un tiempo $T_{ida-vuelta}$ que es el tiempo que demora el pulso en alcanzar nuevamente el extremo.

A partir de los datos experimentales se promedió el tiempo de cinco reflexiones obteniéndose un tiempo para $T_{ida-vuelta}$ dado por:

$$T_{ida-vuelta} = \frac{3,88s - 0,638s}{5} = 0,648s$$

El valor teórico está dado por la ecuación (9)

$$T_{idavuelta} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{\frac{0,10479kg}{0,997N/m}} = 0,648s$$

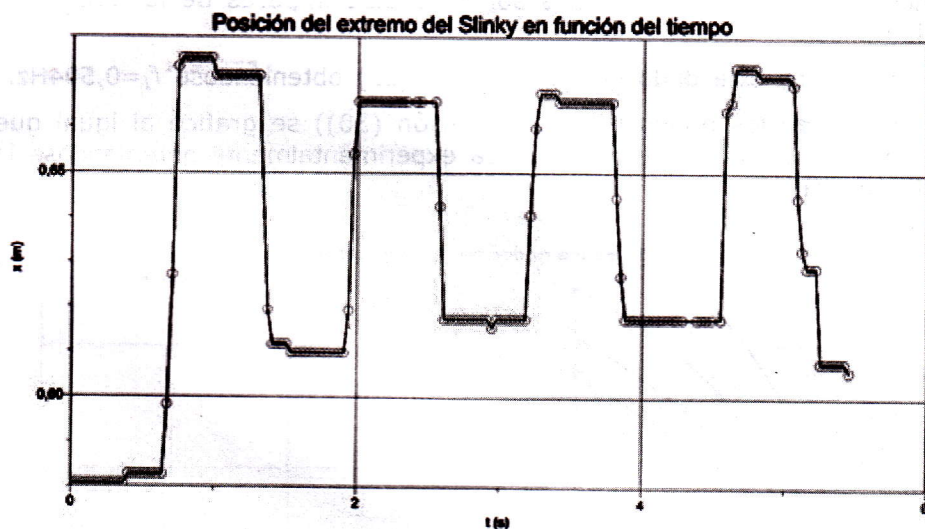


Figura 11. Movimiento del extremo libre de un Slinky en función del tiempo.

Velocidad de un pulso en un resorte

Como ya vimos a partir de la ecuación de ondas (ecuación 5) la velocidad de fase dada por la ecuación (6) es:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0$$

Para hallar su velocidad en función de la posición de las espiras del resorte estirado ξ .

Debemos observar que el tiempo que demora un pulso en recorrer la distancia Δx deberá ser el mismo que demora en recorrer la distancia $\Delta \xi$ luego tenemos que:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{k}{m}} l_0} = \frac{\Delta \xi}{v(x)} = \frac{\Delta x + \Delta X}{v(x)}$$

Luego la velocidad del pulso en función de la posición de las espiras del resorte no estirado es:

$$v(x) = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0 \left(1 + \frac{\Delta X}{\Delta x} \right)$$

En el límite para $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos:

$$v(x) = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0 \left(1 + \frac{dX}{dx} \right) \quad (41)$$

Usando la ecuación (15) que nos da el estiramiento $X(x) = \xi - x$ de un resorte colgado y sometido en su extremo a una fuerza constante F tenemos:

$$v(x) = \sqrt{\frac{k}{m}} l_0 \left(1 + \frac{mg + F}{kl_0} - \frac{mg}{kl_0^2} x \right) \quad (42)$$

Para hallar la velocidad de fase en función de la posición de las espiras del resorte estirado ξ debemos hallar x en función de ξ a partir de la ecuación (15) y de la definición del estiramiento $X(x) = \xi - x$ obteniendo:

$$x = \frac{(mg + F)l_0}{mg} + \frac{kl_0^2}{mg} - \sqrt{\left(\frac{kl_0^2}{mg} + \frac{(mg + F)l_0}{mg} \right)^2 - 2 \frac{kl_0^2}{mg} \xi} \quad (43)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (43) en la ecuación (42) obtenemos:

$$v(\xi) = \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{F}{k} + l_0 + \frac{mg}{k} \right)^2 - 2g\xi} \quad (44)$$

La ecuación anterior muestra que la velocidad de fase de las ondas en un resorte colgado y sometido a una fuerza externa constante F en su extremo, es variable disminuyendo a medida que la onda llega al extremo del resorte. La velocidad máxima del pulso es para $\xi = 0$, su valor es:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(L + \frac{mg}{2k} \right)} \quad (45)$$

La velocidad mínima se produce en el extremo del resorte para $\xi = L$, su valor es:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(L + \frac{mg}{2k} \right)} \quad (46)$$

Resultados para un resorte horizontal sometido a una fuerza F

En el caso que el resorte esté horizontal y sometido a una fuerza externa constante F la velocidad del pulso es constante. Para hallarla basta reem-

plazar $g=0$ (ya que no está sometido a su peso) en la ecuación (44) su valor es:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(l_0 + \frac{F}{k} \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} (l_0 + L - l_0) = \sqrt{\frac{k}{m}} L$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} L \quad (64)$$

Donde L es el largo del resorte estirado. El resultado es sorprendente ya que la velocidad de fase es directamente proporcional al largo L del resorte. El resultado anterior está en total acuerdo con los comentarios iniciales referidos a la ecuación (6) que señalaba que el tiempo que demora un pulso en recorrer dos veces la longitud del resorte (tiempo de ida y vuelta) es independiente de la longitud del resorte L y su valor es:

$$T_{ida-vuelta} = \frac{2L}{v} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{k}{m}} L} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Resultado que coincide con la ecuación (9).

A esta altura el lector se preguntará si realmente esto es así! ¿Es verdad que el tiempo que demora un pulso en recorrer la longitud del resorte es independiente de dicha longitud?

Para analizar este resultado se diseñó una experiencia con un resorte horizontal en donde se fue variando la longitud del resorte L sujeto entre dos soportes fijos y se midió el tiempo usando un sensor de fuerza.

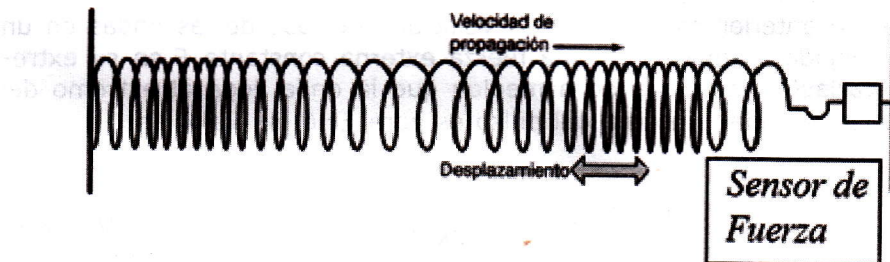


Fig. 12. Dispositivo experimental para medir el $T_{ida-vuelta}$ en un resorte horizontal.

El resultado de la experiencia realizada con un resorte de constante elástica $k=3,07(2)\text{N/m}$, longitud natural de 18cm y 68,5g de masa se resume en el cuadro de la siguiente página.

En el cuadro se aprecia que el tiempo que demora el pulso en recorrer dos veces la longitud del resorte es independiente de la longitud del mismo! y en la gráfica se puede observar que la velocidad del pulso es directamente proporcional a la longitud del resorte!

$L(m)$	$T_{ida-vuelta}(ms)$	$V(m/s)=2L/T_{i-v}$
0.400	302,0	2,649
0.510	300,0	3,400
0.705	297,1	4,746
0.825	300,0	5,500
0.960	297,1	6,462
1.090	299,1	7,289
1.275	297,1	8,583
1.435	298,3	9,621

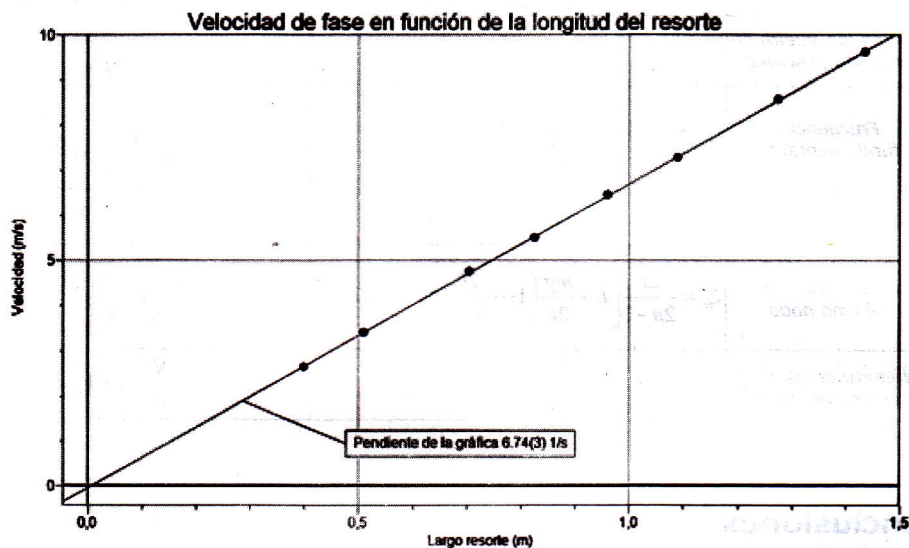


Fig. 13. Gráfico de la velocidad de un pulso en un resorte en función de la longitud del mismo.

A partir de la ecuación (9) el tiempo $T_{ida-vuelta}$ está dado por:

$$T_{ida-vuelta} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{\frac{68,5 \times 10^{-3} \text{ kg}}{3,07 \text{ N/m}}} = 0,2987 \text{ s} = 298,7 \text{ ms}$$

Valor que concuerda con el tiempo promedio medido experimentalmente:

$$T_{ida-vuelta} = 298,8(6) \text{ ms}$$

La pendiente del gráfico es de acuerdo a la ecuación (41):

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3,07 \text{ N/m}}{68,5 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 6,695 \text{ s}^{-1}$$

Valor que concuerda con la pendiente obtenida por mínimos cuadrados a partir de los datos experimentales:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 6,74(3) \text{ s}^{-1}$$

Resumen de las características estáticas y dinámicas de un resorte vertical suspendido

Configuración de un resorte de N espiras		
Atributo	Libre	Estirado por una fuerza externa F (ambos extremos fijos)
Longitud	$L = l_0 + \frac{mg}{2k}$	$L = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{F}{k}$
Posición de centro demasa	$\xi_{CM} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{3k} = \frac{l_0}{2} + \frac{2}{3} \Delta l$	$\xi_{CM} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{3k} + \frac{F}{2k}$
Tiempo ida-vuelta de un pulso (Tida-vuelta)	$2\sqrt{\frac{m}{k}}$	$2\sqrt{\frac{m}{k}}$
Frecuencia fundamental f1	$\frac{1}{2T_{ida-vuelta}} = \frac{\sqrt{k}}{4m}$	$\frac{1}{2T_{ida-vuelta}} = \frac{\sqrt{k}}{2m}$
Frecuencias de resonancia	$(2n-1)f_1 \quad n = 1,2,3,4...$	$nf_1 \quad n = 1,2,3,4...$
Localización de i-ésimo nodo	$\xi_i = \frac{2i}{2n-1} \left[L + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{2i}{2n-1} \right) \right] \quad i = 0,1,2...$	$\xi_i = \frac{i}{n} \left[L + \frac{mg}{2k} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right] \quad i = 0,1,2...$
Número de espiras entre nodos Δn	$\frac{2N}{2n-1} \quad n=2,3,4...$	$\frac{N}{n} \quad n = 1,2,3...$

Conclusiones

Las ondas longitudinales en un resorte vertical suspendido poseen algunas características no intuitivas que resultan del hecho de que el tiempo de tránsito del resorte completo (igualmente que el tiempo por espira) es independiente de las condiciones de borde y sólo depende de las propiedades del resorte, su constante elástica *k* y su masa *m*. El patrón de ondas estacionarias y las frecuencias de un resorte horizontal sometido a una fuerza *F* son idénticos a los obtenidos para un tubo abierto (o cerrado) por ambos extremos.

La posición del centro de masa y el estiramiento del resorte sometido a su propio peso presenta un resultado notable y está ampliamente discutido en la bibliografía en los trabajos de *E. E. Galloni and M. Kohen* [7] y *S. Y. Mak* [8] así como en recientes trabajos ya mencionados.

La experimentación a partir de un resorte (o de un slinky) suspendido por su propio peso y sometido en su extremo a un forzador mecánico es accesible a estudiantes de profesorado o no graduados y posee resultados suficientemente interesantes (y anti-intuitivos) como para motivarlos en el estudio de las ondas longitudinales (mecánicas o acústicas) en especial la vibración de un slinky en los modos *n=2,3,4...* muestra una dinámica compleja con espiras en reposo (nodos) y espiras que vibran a contra-fase entre nodos consecutivos (anti-nodos).

Las matemáticas utilizadas motivan también a los estudiantes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales propias de los fenómenos ondulatorios.

Agradecimientos

A los profesores Guzmán Trinidad y Daniel Baccino por leer el texto original y por sus valiosos comentarios y sugerencias. A Martín Monteiro y Arturo Martí por su paciencia y generosos aportes.

Referencias

- [1] M. Sawicki, *Static elongation of a suspended Slinky™*, *Phys. Teach.* 40 (2002) 276–278.
- [2] T. P. Toepker, *Center of mass of a suspended Slinky: an experiment*, *Phys. Teach.* 42 (2004) 16–17.
- [3] R. Newburgh and G. M. Andes, *Galileo Redux or, how do nonrigid, extended bodies fall?*, *Phys. Teach.* 33 (1995) 586–588.
- [4] L. Ruby, *Equivalent mass of a coil spring*, *Phys. Teach.* 38 (2000) 140–141.
- [5] Juan D. Serna, Amitabh Joshi Nov 13 2011 en <http://arxiv.org/abs/1005.3881v2>
- [6] Richar A. Young *Longitudinal standing waves on a vertically suspended slinky*, *Am.J.Phys.* 61, (1993) 353.
- [7] E. E. Galloni and M. Kohen, *Influence of the mass of the spring on its static and dynamic effects*, *Am. J. Phys.* 47 (1979) 1076–1078.
- [8] S. Y. Mak, *The static effectiveness mass of a Slinky™*, *Am. J. Phys.* 55 (1987) 994–997.
- [9] P.J. Ouseph, *Standing longitudinal waves*, *Am. J. Phys.* 55 (1987) 666–667.
- [10] Casey Rutherford, *A Fresh Look at Longitudinal Standing Waves on a Spring*, *Phys. Teach.* 51, 22–24 (2013)

EDUCACIÓN en FÍSICA

Revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay
Volumen 8, Número 6

Setiembre, 2016

CONTENIDO

EDITORIAL 3

PROCEDIMIENTO DE
PRESENTACIÓN DE TRABAJOS 6

EXPERIMENTO SOBRE LA
LEY DE FARADAY DE INDUCCIÓN
Daniel Baccino y Guzmán Trinidad 7

SOLUCIONES AL PROBLEMA DE MEDIR
ACELERACIONES USANDO UN TELÉFONO
INTELIGENTE: ENFRENTANDO A
LA RELATIVIDAD GENERAL
Martín Monteiro, Cecilia Cabeza y Arturo C. Martí 15

ONDAS LONGITUDINALES EN UN
RESORTE VERTICAL SUSPENDIDO
Francisco Echegorri 25