



Simetrías y leyes de conservación: una mirada conceptual.



Mathias Charbonnier ^{1, 2}

¹ Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

² Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

E-mail: mchabonnier@fing.edu.uy

(Recibido el 10/11/2025, aceptado el 16/3/2026)

Resumen

El presente artículo se basa en la conferencia titulada *Las reglas del juego que nadie escribió (pero todos seguimos)* presentada en el encuentro de la *Asociación de Profesores de Física del Uruguay (APFU)* y tiene como objetivo ofrecer una exposición conceptual y accesible de la relación entre las transformaciones de simetría definidas en una teoría física y las leyes de conservación en la naturaleza. En el marco de la mecánica lagrangiana, se muestra cómo la conservación de magnitudes como la energía, el momento lineal y el momento angular pueden interpretarse como consecuencia directa de determinadas simetrías espaciales y temporales. Para ello se analizan ejemplos simples correspondientes a las simetrías de traslación espacial, rotación y traslación temporal, asociadas respectivamente con la conservación de la cantidad de movimiento, el momento angular y la energía mecánica. Finalmente, se discute brevemente la relevancia de estos principios en teorías físicas más generales, donde el papel de las simetrías adquiere un carácter fundamental.

Palabras clave: Simetrías, Conservación, Noether, Lagrangiano, Principio de mínima acción.

Abstract

This article is based on the conference entitled *The rules of the game that nobody wrote (but we all follow)* presented at the meeting of the *Asociación de Profesores de Física del Uruguay (APFU)* and aims to offer a conceptual and accessible exposition of the relationship between the symmetry transformations defined in a physical theory and the conservation laws in nature. Within the framework of Lagrangian mechanics, it is shown how the conservation of quantities such as energy, linear momentum, and angular momentum can be interpreted as a direct consequence of certain spatial and temporal symmetries. To this end, simple examples corresponding to spatial translation, rotation, and time translation symmetries are analyzed, associated respectively with the conservation of linear momentum, angular momentum, and mechanical energy. Finally, the relevance of these principles in more general physical theories is briefly discussed, where the role of symmetries acquires a fundamental character.

Keywords: Symmetries; Conservation; Noether; Lagrangian; Principle of least action

1. Introducción

El presente trabajo propone una introducción conceptual y visual a uno de los principios más profundos de la física, la relación entre simetrías y leyes de conservación. El objetivo es presentar las ideas de manera accesible y sugerente, con el fin de ofrecer una visión de la física más unificadora y universal. Si bien el enfoque general se mantiene en un nivel conceptual, sobre el final del trabajo se incluyen dos capítulos destinados a desarrollar un tratamiento matemático más riguroso, el cual amplía las ideas discutidas previamente y brinda una continuidad natural para quienes deseen un nivel de análisis más profundo.

Comenzaremos en el capítulo 2 explorando el concepto de simetría, diferenciando entre simetrías discretas y continuas. A través de ejemplos sencillos como la rotación de un polígono regular (*simetría discreta*) y la traslación vertical de una función lineal (*simetría continua*), se establecerá la idea de que ciertos objetos o leyes pueden permanecer invariantes ante transformaciones. Asimismo, se verá que dichas transformaciones de simetría presentan ciertas propiedades que pueden organizarse dentro de una estructura matemática más general, conocida como *grupo*. Esta noción se trasladará luego al ámbito de las leyes físicas, y veremos que muchas de estas leyes que usamos cotidianamente no cambian cuando se aplican ciertas transformaciones del *espacio-tiempo*. En el capítulo 3, se analizarán tres ejemplos fundamentales de cómo las simetrías continuas están asociadas a cantidades conservadas:

- Invariancia bajo traslaciones en el espacio implica conservación del momento lineal.
- Invariancia bajo rotaciones implica conservación del momento angular.
- Invariancia bajo traslaciones en el tiempo implica conservación de la energía.

El objetivo principal es abordar estos ejemplos de manera visual y mediante situaciones familiares. En el capítulo 4 se presentará el *teorema de Noether* de forma cualitativa. Dicho teorema establece una conexión profunda entre ciertas simetrías de un sistema físico y las cantidades conservadas asociadas al mismo. Además, constituye una de las ideas más valiosas y unificadoras de la física del siglo XX. Se enfatizará que no se trata de una coincidencia, sino de una consecuencia matemática del formalismo con el que se formulan las teorías físicas. Para conectar estas observaciones con una base más rigurosa, se introducirá en el capítulo 5 de manera breve el formalismo *lagrangiano*. Se explicará que, en el contexto clásico, los sistemas pueden representarse a través de una función

llamada lagrangiano, que depende de las posiciones y velocidades del sistema. Esta función permite aplicar un principio poderoso, el *principio de mínima acción*, según el cual la naturaleza "elige" trayectorias que minimizan cierta cantidad escalar, la acción. Se destacará que este principio unifica una enorme cantidad de fenómenos físicos y es una herramienta conceptual central en física moderna.

Como cierre conceptual, se señalará que, aunque los ejemplos desarrollados a lo largo del artículo se enmarcan en la física clásica, el papel de las simetrías se vuelve aún más central en teorías modernas. Sin entrar en detalles técnicos, se mencionará muy brevemente que la física contemporánea no solo sigue utilizando el teorema de Noether, sino que lo ha elevado al nivel de principio orientador en la búsqueda de nuevas teorías. En muchos casos, las simetrías no solo son una propiedad deseable, sino que son un requisito a la hora de construir modelos físicos coherentes.

2. Simetrías como algo cotidiano

De alguna forma, todos estamos familiarizados con el concepto de simetría. Ya sea desde lo cotidiano o lo académico, todos coincidimos en que, siempre que se habla de simetría hay algo que se mantiene, algo es igual. Para los griegos, la simetría significaba algo equilibrado y bien proporcionado. Era una idea que significaba perfección. En su contexto geométrico, la simetría se asociaba con la conmensurabilidad [1]. También implicaba una regularidad de forma, y la relación exhibida entre las diferentes partes de un todo. Para ellos, las simetrías de la naturaleza deberían reflejarse directamente en el movimiento de los objetos, las estrellas y planetas deben moverse en círculos porque esas son las trayectorias más simétricas. Por supuesto, los planetas no lo hacen, y esa no fue la última vez que intuiciones ingenuas sobre las simetrías se encontraron con problemas en el experimento. Como señala el matemático alemán Hermann Weyl: "en la medida en que puedo verlo, todas las afirmaciones *a priori* de la física tienen su origen en la simetría" [2]. Las simetrías se manifiestan en las ecuaciones de movimiento en lugar de en soluciones particulares a esas ecuaciones. La ley de gravitación universal de Newton, por ejemplo, exhibe simetría esférica (la fuerza es la misma en todas las direcciones), y, sin embargo, las órbitas planetarias son elípticas. Como vemos, en física la intuición o ciertos principios generales a menudo sugieren la presencia de simetrías en un problema, y su explotación sistemática puede convertirse en una herramienta extremadamente poderosa. Esto nos lleva a la pregunta: ¿cómo entendemos las simetrías en física? Diremos que una simetría es una transformación

que puede realizarse (al menos conceptualmente) sobre un sistema y que lo deja invariante; es decir, lo lleva a una configuración indistinguible de la original [3]. Para visualizar esta idea analicemos el sistema de la Figura 1.

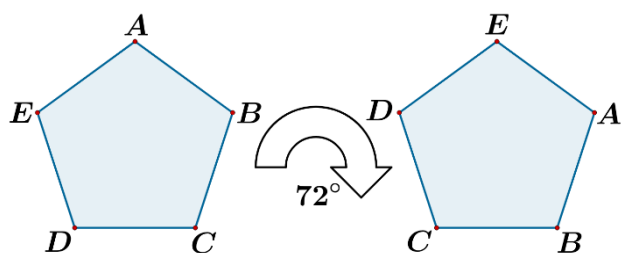


Figura 1. Rotación de 72° de un pentágono regular, ilustrando una simetría discreta del mismo.

Si consideramos al pentágono como nuestro sistema y etiquetamos sus vértices, veremos que una rotación en este caso de 72° permite obtener una configuración idéntica a la inicial. De hecho, cualquier rotación cuyo ángulo sea un múltiplo entero de este valor será una simetría de este sistema. A este tipo de simetrías se las conoce como *simetrías discretas* ya que están parametrizadas por conjunto discreto de valores, es decir, podremos rotar $n \times 72^\circ$ con $n \in \mathbb{Z}$ veces, pero no por ejemplo $n = 2.5$, ya que no obtendríamos el mismo sistema.

Observemos que la situación anterior satisface algunas propiedades deseables a la hora de pensar las simetrías como transformaciones de un sistema. Si denotamos por $R(n, 72^\circ)$ a la transformación de simetría que toma el sistema anterior y lo rota $n \in \mathbb{Z}$ veces 72° , donde entendemos que $n < 0$ es una rotación en sentido contrario, entonces:

1. Aplicar $R(n, 72^\circ)$ y luego aplicar $R(m, 72^\circ)$ es lo mismo que aplicar $R(n + m, 72^\circ)$.
2. Siempre que aplicamos $R(n, 72^\circ)$ podemos aplicar $R(-n, 72^\circ)$ y eso vuelve el sistema al estado inicial.
3. $R(0, 72^\circ)$ deja al sistema en el estado inicial.

La propiedad (1) nos dice que dadas dos transformaciones de simetría del sistema puedo crear una nueva transformación (que también es una simetría) en base a las anteriores definiendo esta como la composición. La propiedad (2) establece que dada una transformación de simetría es posible encontrar una transformación inversa que vuelve el sistema a su estado inicial. Finalmente, la propiedad (3) nos dice que existe una transformación de simetría trivial que consiste en dejar al sistema en su estado inicial.

Antes de enunciar una definición general sobre estas transformaciones, veamos otro ejemplo de simetría que resulta fundamental en el estudio de

sistemas físicos.

Consideremos el sistema representado en la Figura 2, donde se muestran en un mismo plano las funciones polinómicas de primer grado $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como $f(x) = 2x$ y $g(x) = 2x + d$, donde d es una constante real. Podemos interpretar el paso de f a g como una traslación vertical del gráfico de la función original. Esta transformación no modifica la forma de la recta, sino que simplemente la desplaza a lo largo del eje y . En particular, observamos que la pendiente, que caracteriza la razón de cambio de la función, permanece invariante y conserva el mismo valor, 2, en ambos casos.

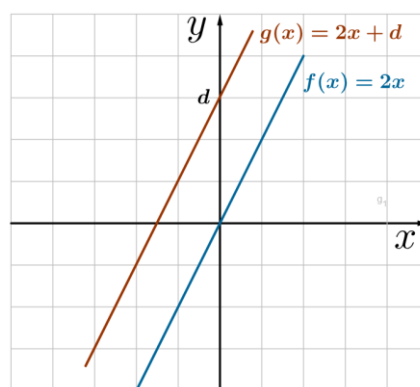


Figura 2. Traslación vertical de un gráfico lineal que deja invariante la pendiente ilustrando una simetría continua.

A este segundo tipo de simetría se le conoce como simetría continua, ya que ahora el parámetro de traslación puede ser cualquier número real y, sin embargo, la pendiente no cambiará. Nuevamente, si denotamos por $T(d)$ con $d \in \mathbb{R}$ a la traslación por d de la función f , tenemos que se satisface:

1. Aplicar $T(d)$ y luego aplicar $T(h)$ es lo mismo que aplicar $T(d + h)$.
2. Siempre que aplicamos $T(d)$ podemos aplicar $T(-d)$ y eso vuelve el sistema al estado inicial.
3. $T(0)$ deja al sistema en el estado inicial.

La estructura anterior junto con la del primer ejemplo es en realidad una estructura matemática mucho más general denominada *grupo* y resulta ser que el conjunto de todas las simetrías de un sistema cumple las propiedades algebraicas del mismo, es decir, si denominamos F al conjunto de todas las simetrías de un mismo sistema y definimos la operación $*$ en F como la operación de composición entre sus elementos, entonces se satisface que [4]:

1. **Clausura:** Si $f, g \in F$ entonces $f * g \in F$.
2. **Identidad:** Existe $I \in F$ tal que $I * f = f * I = f$ para todo $f \in F$.

3. **Inverso:** Para todo $f \in F$ existe $f^{-1} \in F$ tal que $f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$.
4. **Asociatividad:** $f * (g * h) = (f * g) * h$ para todo $f, g, h \in F$.¹

Una observación importante es que no es necesario que los elementos de un grupo² conmuten entre sí, en tal caso el grupo se denomina *abeliano* o *conmutativo*. Como ejemplo de esto último, si trabajamos en el espacio euclídeo de 3 dimensiones, las traslaciones en el mismo forman un grupo abeliano mientras que las rotaciones no.

3. Simetría y conservación (I)

Hasta ahora nos hemos dedicado a tratar de entender qué es una simetría, cómo podemos definirla y visualizar algunas de sus propiedades. En este capítulo nos proponemos dar una noción de cómo es que aparecen en sistemas físicos y por qué su presencia es de suma importancia cuando uno quiere trabajar con sistemas más complejos.

Comencemos analizando un sistema clásico sencillo, el movimiento de un proyectil, representado en la Figura 3. Se trata de un ejemplo idealizado en el que un cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad, despreciando la resistencia del aire.

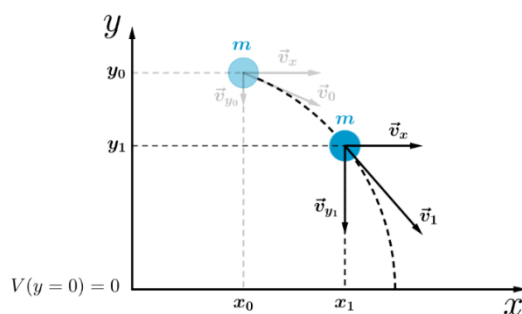


Figura 3. Trayectoria parabólica de un proyectil: movimiento uniforme en x y acelerado en y .

Como es habitual en el análisis de este tipo de movimiento, el proyectil presenta un movimiento uniforme en la dirección horizontal y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical. En consecuencia, el momento lineal horizontal $\vec{p}_x = m\vec{v}_x$ se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria, mientras que el momento lineal vertical $\vec{p}_y = m\vec{v}_y$ varía con el tiempo debido a la acción de la gravedad sobre la componente vertical de la velocidad.

¹ Aunque resulta menos evidente de visualizar en los ejemplos de las Figuras 1 y 2, la propiedad asociativa también se cumple en ambos casos.

Analicemos ahora qué ocurre cuando aplicamos una traslación horizontal a este sistema. Consideremos el proyectil situado inicialmente en una posición fija (x_0, y_0) y trasladémoslo una distancia d a lo largo del eje x . En términos de coordenadas, esto equivale a realizar la transformación

$$x_0 \rightarrow x'_0 = x_0 + d. \quad (\text{Ec. 1})$$

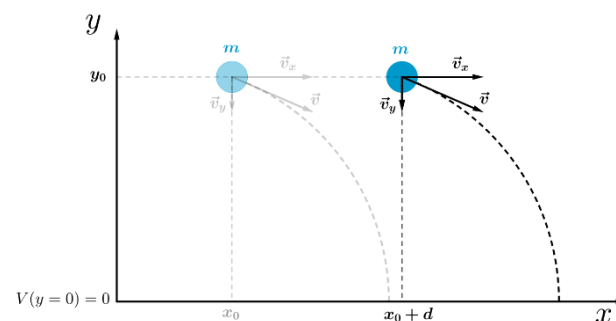


FIGURA 4. Traslación horizontal del sistema, el movimiento parabólico se representa en dos posiciones que difieren en una distancia d sobre el eje x . Dado que la traslación ocurre dentro de una equipotencial el sistema es invariante bajo esta transformación.

Como se ilustra en la Figura 4, este desplazamiento no modifica ni la forma de la trayectoria ni la acción del campo gravitatorio sobre el proyectil. Observemos, además, que esta transformación constituye una simetría respecto de la energía, pues dado que la energía potencial gravitatoria presenta equipotenciales horizontales, la energía tanto antes como después de la traslación es

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_{y_0}^2) + mgy_0. \quad (\text{Ec. 2})$$

En cambio, si realizamos una traslación vertical del sistema, de modo que $y_0 \rightarrow y'_0 = y_0 + d$, como se muestra en la Figura 5, observamos que la energía potencial del proyectil sí se ve modificada. En este caso, la configuración resultante no es indistinguible de la original, ya que el valor del potencial gravitatorio cambia con la altura. La energía del sistema después de la traslación vertical está dada por

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_{y_0}^2) + mg(y_0 + d). \quad (\text{Ec. 3})$$

Por lo tanto, la traslación vertical no constituye una simetría del sistema.

² Las simetrías en nuestro caso.

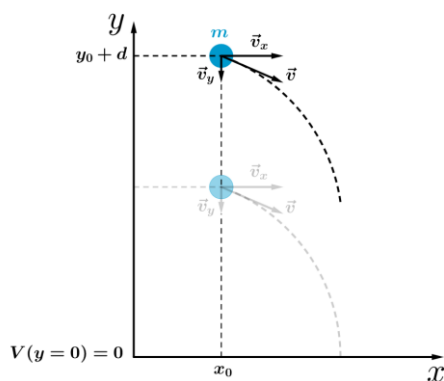


Figura 5. Traslación vertical del sistema, el movimiento parabólico se desplaza una distancia d en el eje y . Dado que la energía potencial del sistema cambia con la altura, el sistema no es invariante bajo esta transformación.

Hemos encontrado, entonces, un paralelismo notable. En aquellas direcciones del espacio donde el sistema presenta simetría bajo traslaciones, existe una cantidad conservada: el momento lineal. En cambio, en las direcciones donde dicha simetría no está presente, esa cantidad deja de conservarse.

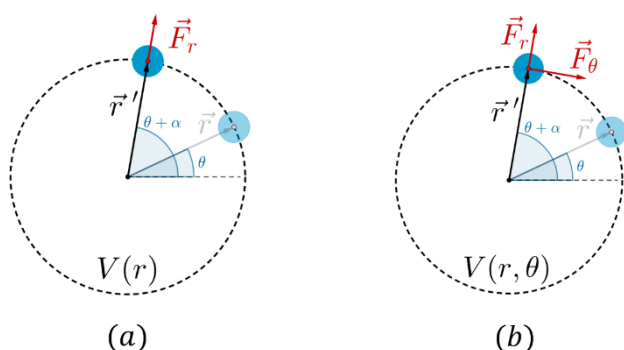


Figura 6. (a) Potencial central isotrópico: la fuerza sobre la partícula depende solo de la distancia al centro y apunta en dirección radial, conservando el momento angular. (b) Potencial anisotrópico: la fuerza depende tanto de la distancia como del ángulo, presentando componentes tangenciales que generan torques y rompen la conservación del momento angular.

Antes de enunciar la ley general que relaciona estas observaciones, consideremos un segundo ejemplo. Analicemos el caso del movimiento de una partícula bajo la acción de dos potenciales centrales distintos, uno isotrópico y otro anisotrópico. El primer caso, Figura 6a, corresponde a un potencial central isotrópico, como ocurre por ejemplo en la interacción gravitatoria o en la interacción electrostática de *Coulomb*. La fuerza que actúa sobre la partícula depende únicamente de la distancia al centro y apunta siempre en dirección radial. Esto implica que, si

realizamos una transformación de rotación $\theta \rightarrow \theta' = \theta + \alpha$ alrededor del origen, la configuración resultante es indistinguible de la original, el sistema es, por lo tanto, invariante bajo rotaciones. Además, en este tipo de sistemas el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ se conserva en el tiempo, resultado que se obtiene a partir de las ecuaciones de movimiento para fuerzas centrales [5].

En cambio, en el segundo caso, Figura 6b, si la partícula se encuentra sometida a un potencial anisotrópico, este rompe la simetría anterior, ya que ahora depende tanto de la distancia como de la dirección respecto del origen. En esta situación el sistema deja de ser invariante bajo rotaciones. La fuerza puede obtenerse a partir del potencial mediante

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (\text{Ec. 4})$$

que en coordenadas polares planas toma la forma

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\theta. \quad (\text{Ec. 5})$$

El hecho de que el segundo término del lado derecho de la ecuación (5) sea distinto de cero implica que la fuerza adquiere componentes tangenciales que generan torques no nulos. Como consecuencia, el momento angular deja de conservarse.

Este contraste entre ambos escenarios ilustra nuevamente la idea central de que la presencia o ausencia de una simetría determina la existencia o la ruptura de una cantidad conservada.

Por último, presentemos un ejemplo que permite ilustrar la relación entre otra simetría y la conservación de una cantidad fundamental en los sistemas mecánicos. Consideremos una partícula de masa m unida a un resorte ideal de constante elástica k , que puede moverse sin rozamiento a lo largo de una dimensión, como se muestra en la Figura 7.

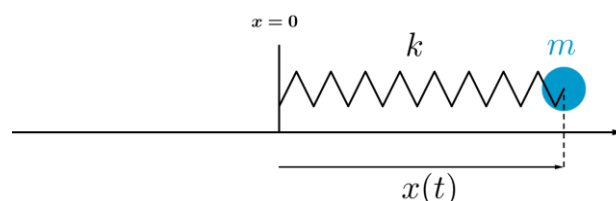


Figura 7. Oscilador armónico unidimensional formado por una partícula de masa m unida a un resorte ideal de constante elástica k . La coordenada $x(t)$ indica el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio.

En este caso, la partícula está sometida a un potencial de la forma

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (\text{Ec. 6})$$

donde x representa el desplazamiento de la partícula respecto de la posición de equilibrio. La energía mecánica del sistema puede escribirse entonces como

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2. \quad (\text{Ec. 7})$$

Puede observarse que esta expresión no depende explícitamente de la variable temporal. Esto implica que las ecuaciones que describen el movimiento del sistema mantienen la misma forma independientemente del instante en que se considere el experimento. Aunque la posición de la partícula $x(t)$ evoluciona con el tiempo, las leyes que describen su dinámica no distinguen entre distintos instantes. En otras palabras, el sistema es invariante bajo traslaciones temporales, es decir, su descripción no cambia si se desplaza el tiempo $t \rightarrow t + \Delta t$. En este contexto, se satisface además que la energía del sistema permanece constante durante su evolución. Este ejemplo ilustra nuevamente cómo la presencia de una simetría en la descripción del sistema se refleja en la existencia de una cantidad conservada.

A continuación, presentamos el teorema que formaliza estas ideas y establece la relación general entre simetrías y leyes de conservación.

4. Teorema de Noether

Estamos ahora listos para enunciar uno de los resultados más célebres de la física del siglo XX. Su autora fue la matemática alemana Emmy Noether (1882–1935), quien realizó aportes fundamentales tanto en álgebra abstracta como en física teórica. Durante las décadas de 1910 y 1920 trabajó en la Universidad de Göttingen, donde, en colaboración con figuras como Hilbert y Klein, formuló un resultado que transformó nuestra comprensión del vínculo entre las simetrías y las leyes de conservación [6].

En términos sencillos, el Teorema de Noether establece que [7]:

“A cada simetría continua del espacio-tiempo le corresponde una ley de conservación, y cada ley de conservación refleja una simetría subyacente”

Este principio unifica en una sola idea los ejemplos que hemos visto. La simetría traslacional se

asocia con la conservación del momento lineal, la simetría rotacional con la conservación del momento angular y la simetría de traslación temporal con la conservación de la energía mecánica. El teorema de Noether no solo proporciona una herramienta conceptual poderosa, sino que también revela una estructura profunda y universal en las leyes de la física.

El objetivo de los próximos capítulos será introducir un formalismo algo más exigente desde el punto de vista matemático que nos permita demostrar los resultados que en los apartados anteriores solamente nos limitamos a presentar desde un enfoque más conceptual. Si bien los detalles matemáticos no son indispensables para la comprensión de las ideas principales del trabajo, su lectura permite profundizar y aportar un punto de vista más riguroso.

5. Formalismo lagrangiano y principio de mínima acción

La *mecánica lagrangiana* constituye una reformulación elegante y conceptualmente poderosa de la mecánica newtoniana. Aunque ambas teorías son equivalentes en su contenido físico, el enfoque *lagrangiano* ofrece una mayor flexibilidad para el tratamiento de sistemas con múltiples grados de libertad y resulta especialmente adecuado para generalizaciones posteriores, como la electrodinámica o teorías de campos.

El punto de partida de este formalismo es el principio de mínima acción. Según este principio, la evolución de un sistema físico entre dos instantes dados está determinada por aquella trayectoria que hace extremal (típicamente mínima) una cierta cantidad escalar denominada acción la cual denotamos por la letra S . Desde el punto de vista matemático, este principio se enmarca en el cálculo variacional. En el apéndice A se presenta una breve introducción a esta herramienta, suficiente para comprender el origen de las ecuaciones que utilizaremos. En lo que sigue, tomaremos como punto de partida el resultado fundamental de dicho formalismo.

Antes de continuar, conviene introducir el concepto de coordenadas generalizadas. En un sistema mecánico, el número de grados de libertad corresponde al número mínimo de parámetros independientes necesarios para describir completamente su configuración. Por ejemplo, una partícula libre en el espacio posee tres grados de libertad, ya que su posición queda determinada mediante tres coordenadas. En el formalismo lagrangiano se denominan coordenadas generalizadas a cualquier conjunto de variables $q_1, q_2, \dots, q_s$ que permita especificar de manera única la configuración del sistema, donde s es el número de

grados de libertad. Estas coordenadas no tienen por qué ser necesariamente cartesianas, pueden ser también coordenadas angulares, distancias u otras variables que resulten más convenientes para describir el problema. Por ejemplo, para una partícula en el espacio tridimensional se pueden elegir distintos conjuntos de coordenadas generalizadas como (x, y, z) en coordenadas cartesianas, (r, ϕ, z) en coordenadas cilíndricas o (r, θ, ϕ) en coordenadas esféricas. En lo que sigue utilizaremos la notación general q_i para mantener el formalismo lo más general posible.

Consideremos ahora el caso de una partícula cuya posición puede describirse mediante tres coordenadas q_1, q_2, q_3 , y que se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas. Para simplificar la notación trabajaremos con este caso, aunque el procedimiento es completamente generalizable a sistemas con múltiples partículas y grados de libertad. Si T denota la energía cinética de la partícula y U su energía potencial, podemos definir un vector de coordenadas generalizadas como $q = (q_1, q_2, q_3)$ y un vector de velocidades generalizadas $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. Con esta notación, el funcional de acción se define como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q(t), \dot{q}(t)), \quad (\text{Ec. 8})$$

donde

$$L(t, q(t), \dot{q}(t)) \equiv T(t, q(t), \dot{q}(t)) - U(t, q(t)) \quad (\text{Ec. 9})$$

es el lagrangiano del sistema. La acción S es un número asociado a cada trayectoria del sistema que conecta dos configuraciones en dos instantes de tiempo $t_1 < t_2$ con condiciones de borde

$$q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad q_i(t_2) = q_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Ec. 10})$$

donde tanto $q_i^{(1)}$ como $q_i^{(2)}$ son constantes para cada valor de i . El principio de mínima acción establece que, entre todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema, este elige aquella que hace extremal (típicamente mínima) la acción S [7]. El resultado fundamental del cálculo variacional (presentado en el apéndice A) implica que dicha trayectoria debe satisfacer las ecuaciones³

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{Ec. 11})$$

conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange* para el sistema.

³ Una para cada coordenada generalizada q_i .

Como ejemplo de que estas ecuaciones son equivalentes a las de Newton, consideremos nuevamente el oscilador armónico unidimensional de la Figura 7. Tenemos una única partícula de masa m confinada a moverse en el extremo de un resorte de constante elástica k y en el cual consideraremos que su longitud de equilibrio es nula para simplificar los cálculos. En tal caso, el lagrangiano es

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (\text{Ec. 12})$$

Y la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la coordenada x nos da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad (\text{Ec. 13})$$

obteniendo

$$m \ddot{x} + kx = 0. \quad (\text{Ec. 14})$$

Que coincide con el resultado clásico obtenido a partir de las leyes de Newton.

Obsérvese que, si bien desde el punto de vista matemático el procedimiento puede resultar algo más laborioso, se arriba al mismo resultado mediante un análisis puramente escalar, sin necesidad de introducir vectores ni direcciones explícitas para la fuerza elástica. Esta es justamente una de las razones por las cuales estos métodos resultan ser altamente eficaces en el análisis de sistemas más complejos.

6. Simetría y conservación (II)

En el capítulo anterior presentamos un formalismo matemático que constituye una reformulación de las leyes de Newton para el caso de sistemas sometidos a fuerzas conservativas. En lo que sigue, mostraremos que las simetrías de un sistema físico están directamente relacionadas con las invariancias del lagrangiano que lo describe.

6.1. Simetría e invariancia

Supongamos que nuestro lagrangiano es invariante bajo la traslación de una de sus coordenadas generalizadas. Es decir,

$$L(t, q_1, q_2, q_3, \dot{q}) = L(t, q_1, q_2 + c, q_3, \dot{q}) \quad (\text{Ec. 15})$$

donde c es una constante.

Esta condición implica que el lagrangiano L no depende explícitamente de la coordenada q_2 y, por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad (\text{Ec. 16})$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange deducimos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 0 \rightarrow p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \text{Constante} \quad (\text{Ec. 17})$$

En consecuencia, siempre que un sistema posea una simetría asociada en alguna de sus coordenadas generalizadas, de modo que dicha transformación lo deje indistinguible de su estado inicial, existirá una cantidad conservada asociada a esa simetría. Esta cantidad suele denominarse momento generalizado p_2 .

6.2. Simetría traslacional

Retomemos ahora el ejemplo inicial del capítulo 3. En dicho caso pusimos de manifiesto un paralelismo entre la presencia de una simetría espacial y la conservación del momento lineal. Observamos que, en las direcciones donde el sistema presentaba invariancia bajo traslaciones, el momento se conservaba, mientras que en aquellas donde no existía tal simetría, dicha conservación dejaba de cumplirse. En lo que sigue presentaremos una demostración formal de dicho resultado, utilizando el formalismo lagrangiano presentado en la sección anterior.

Para ello, veamos que el lagrangiano para esta situación está dado por

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - mgy. \quad (\text{Ec. 18})$$

En base a lo discutido en la sección anterior, observamos que este lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada espacial x . Por lo tanto, por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{Constante} \quad (\text{Ec. 19})$$

Lo cual reproduce la conservación del momento lineal en la dirección horizontal.

De igual forma, puesto que en este caso el lagrangiano sí depende explícitamente de la coordenada y , se tiene que la derivada del mismo respecto de esta variable es distinta de 0 ($\partial_y L \neq 0$). En consecuencia, no podemos obtener una ley de

conservación para el momento en dicha dirección. Sin embargo, observemos que la ecuación de Euler-Lagrange para esta coordenada nos conduce a la ecuación de movimiento obtenida a partir de la segunda ley de Newton

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = -mg \rightarrow \ddot{y} = -g. \quad (\text{Ec. 20})$$

6.3. Simetría Rotacional

De manera análoga, retomemos ahora el segundo ejemplo del capítulo 3, en el cual argumentamos que, bajo un potencial central isotrópico, el sistema presenta una simetría rotacional y, en consecuencia, posee una cantidad conservada, el momento angular. En cambio, para un potencial anisotrópico, que depende explícitamente del ángulo θ , dicha simetría se rompe y el momento angular deja de conservarse. En lo que sigue, presentaremos una demostración formal de este resultado, completamente análoga a la realizada para el caso de las traslaciones espaciales.

Para el potencial isotrópico, el lagrangiano en coordenadas polares planas toma la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r). \quad (\text{Ec. 21})$$

Donde $U(r)$ puede representar cualquier potencial esféricamente simétrico, como los asociados a la interacción electrostática de Coulomb o a la ley de gravitación universal de Newton. Observemos que, nuevamente al no existir una dependencia explícita del ángulo θ se cumple que $\partial_\theta L = 0$ y por lo tanto la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la coordenada generalizada θ conduce a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \rightarrow L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{cte} \quad (\text{Ec. 22})$$

Esta cantidad corresponde precisamente al módulo del momento angular para este problema, pues

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \\ &= mr^2\dot{\theta} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{Ec. 23})$$

En consecuencia, la invariancia del sistema (y, por lo tanto, también de su lagrangiano) bajo rotaciones implica la conservación del momento angular.

Por otra parte, si el potencial ahora presenta una dependencia explícita con θ , es decir $U = U(r, \theta)$, el momento angular ya no será conservado. En este caso, la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la

coordenada generalizada θ dará lugar a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow mr^2 \ddot{\theta} = -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{Ec. 24})$$

que corresponde con la segunda cardinal para este sistema. Ya que el término del lado derecho representa el torque que actúa sobre la partícula, pues

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \nabla U, \quad (\text{Ec. 25})$$

y utilizando la ecuación (5) y el hecho de que $\vec{r} = r\hat{e}_r$, tenemos que

$$\vec{\tau} = -r\hat{e}_r \times \left(\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right), \quad (\text{Ec. 26})$$

obteniendo

$$\vec{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta. \quad (\text{Ec. 27})$$

6.4. Simetría Temporal

Hasta ahora nos hemos concentrado en dos magnitudes clásicas fundamentales, el momento lineal y el momento angular, ambas asociadas a simetrías espaciales. Sin embargo, existe una tercera cantidad aún más universal en la física clásica, la energía mecánica del sistema. Al igual que las anteriores, también puede interpretarse como el resultado de una simetría subyacente y veremos que se corresponde con una simetría temporal. Gracias al formalismo lagrangiano desarrollado, podremos demostrar de forma sencilla bajo qué condiciones esta cantidad permanece conservada.

Nuevamente, consideremos el sistema formado por una única partícula, cuya configuración queda determinada por el vector de coordenadas generalizadas $q = (q_1, q_2, q_3)$. En este caso, el sistema está descrito por un lagrangiano $L(t, q, \dot{q})$ y, como se muestra en el apéndice C, al derivar esta función respecto del tiempo se obtiene la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (\text{Ec. 28})$$

donde se define

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (\text{Ec. 29})$$

como el *hamiltoniano* del sistema. Como se puede observar, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, es decir, presenta una simetría temporal de modo que $\partial_t L = 0$, se tiene que H es una cantidad conservada.

Para aquellos sistemas en que la dependencia de la energía cinética con las coordenadas generalizadas se da mediante una función homogénea de segundo orden en $\dot{q}_i$, el hamiltoniano H coincide con la energía mecánica del sistema.

Por ejemplo, para los casos analizados tenemos que

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q), \quad (\text{Ec. 30})$$

donde q representa las coordenadas relevantes del problema. En el primer ejemplo puede corresponder a las coordenadas cartesianas x o y , mientras que en el segundo puede representar las coordenadas polares r o θ . Independientemente de esta elección, se obtiene que

$$H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + U(q) = E. \quad (\text{Ec. 31})$$

Es decir, en este tipo de sistemas el hamiltoniano coincide con la energía mecánica total y además es una cantidad conservada por la ecuación (28).

Cuando el lagrangiano presenta otras dependencias funcionales, la cantidad conservada H puede no coincidir exactamente con la energía mecánica, aunque sigue siendo la constante de movimiento asociada a la simetría temporal del sistema.

7. Simetrías en otros contextos

A lo largo de este trabajo nos hemos concentrado en ejemplos relacionados con sistemas clásicos, ya que históricamente ese fue el punto de partida natural. En este contexto, las simetrías espaciales y temporales se traducen de manera directa en las leyes de conservación del momento lineal, el momento angular y la energía.

Sin embargo, el papel de las simetrías se vuelve aún más profundo y esencial en el marco de las teorías modernas de la física. En tal contexto, las simetrías no solo se consideran una propiedad elegante o deseable, sino que constituyen un elemento fundamental en la formulación misma de las teorías. El teorema de Noether, que como vimos en mecánica clásica relaciona simetrías con leyes de conservación, se ha convertido en

una herramienta central. Toda teoría física consistente debe respetar ciertos tipos de simetría.

Por ejemplo, en la teoría de la relatividad, la invariancia bajo traslaciones y rotaciones en el espacio-tiempo conduce a la conservación del tensor energía-momento y del momento angular relativista. En mecánica cuántica, las simetrías adquieren un rol aún más sutil, la conservación de la carga eléctrica, del número bariónico o del espín, entre otras, pueden entenderse como consecuencia de simetrías internas que actúan en espacios abstractos, más allá del espacio físico ordinario.

En las teorías de campos modernas [8], las simetrías locales (también llamadas simetrías de gauge) desempeñan un papel aún más fundamental, ya que constituyen el punto de partida para formular teorías como la electrodinámica cuántica o el modelo estándar de física de partículas.

En definitiva, el estudio de las simetrías, iniciado en un contexto clásico, se ha transformado en una guía esencial en la búsqueda de leyes más profundas y unificadoras de la naturaleza. Las simetrías ya no cumplen un rol meramente estético en las ecuaciones de movimiento, sino que, en muchos casos, representan la única vía posible para comprender ciertos fenómenos.

8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se buscó ofrecer una visión conceptual y unificada del vínculo entre las simetrías y las leyes de conservación en física. A partir de ejemplos simples y representativos como figuras geométricas y sistemas mecánicos clásicos se introdujo la noción de simetría como una transformación que deja invariante un sistema, estableciendo así el marco intuitivo sobre el que se construyen muchas leyes físicas.

El análisis de casos concretos, como el movimiento parabólico o los potenciales centrales isotrópico y anisotrópico, permitió reconocer el patrón de que las direcciones que presentan simetrías también tienen cantidades conservadas asociadas. Este paralelismo, lejos de ser una coincidencia, fue formalizado por Noether en el teorema que lleva su nombre, cuya potencia conceptual se hace evidente al reformular las leyes del movimiento en términos del formalismo lagrangiano y el principio de mínima acción. La demostración explícita de las leyes de conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía permitió ilustrar de manera clara cómo las invariancias bajo traslaciones espaciales, rotaciones y

traslaciones temporales se traducen, respectivamente, en las magnitudes conservadas analizadas previamente.

En definitiva, este recorrido permitió evidenciar que las simetrías no son solo un recurso estético o una propiedad secundaria, sino un principio que otorga coherencia y universalidad a las leyes de la física. El enfoque adoptado, de carácter accesible y conceptual, busca además resaltar el valor pedagógico de estos temas como puerta de entrada al pensamiento teórico en física.

9. Referencias

- [1] P. R. Cromwell, *Polyhedra* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977).
- [2] Weyl, H., *Symmetry* (Princeton University Press, Princeton, 1952).
- [3] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. 2nd ed. (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [4] A. Gonçalves, *Introdução à álgebra* (IMPA, Rio de Janeiro, 1979).
- [5] J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. (Brooks/Cole, New York, 2004).
- [6] S. Castro, *Historia de las matemáticas: del cero al infinito* (The Galobart Books, Madrid, 2019).
- [7] H. Goldstein, C. P. Poole & J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. (Addison-Wesley, San Francisco, 2002).
- [8] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2014).
- [9] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).

10. APÉNDICES

10.1. Apéndice A

El formalismo lagrangiano de la mecánica se basa en una idea matemática conocida como cálculo variacional. Esta herramienta, además de constituir el punto de partida habitual para la construcción del formalismo, posee interés propio, ya que permite abordar un problema general de optimización. Para ello será necesario introducir el concepto de *funcional*. De la misma forma que una función $y = f(x)$ no es más que una forma de asociar un número x a otro número y , un funcional es una forma de asociar un número a toda una función. En general lo denotamos por $z = F[f]$. Un ejemplo de esto es, dado un intervalo en la recta real $[x_1, x_2]$ podemos definir el funcional

$$z = F[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx [f(x)]^2. \quad (\text{Ec. 32})$$

De esta forma, el funcional anterior calcula la integral del cuadrado de una función f en dicho intervalo y devuelve su valor como el número z .

El problema fundamental del cálculo variacional puede formularse de la siguiente manera. Sea $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $g(x, f, f')$ una función dada que depende de la variable x y de una función de clase C^1 , f donde f' simboliza su derivada. Se define el funcional

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x, f(x), f'(x)). \quad (\text{Ec. 33})$$

El problema consiste en determinar la función $f(x)$ que hace extremal (mínima o máxima) la cantidad $F[f]$. Planteado de esta forma, este es un problema muy genérico dado que existen infinitas funciones posibles. Así que normalmente se suelen restringir las funciones a aquellas que además pasan por dos puntos fijos, es decir, se imponen las condiciones de contorno $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Desde un punto de vista geométrico, como se ilustra en la Figura 8 nos interesa encontrar la función f que extrema el funcional F dados dos puntos fijos.

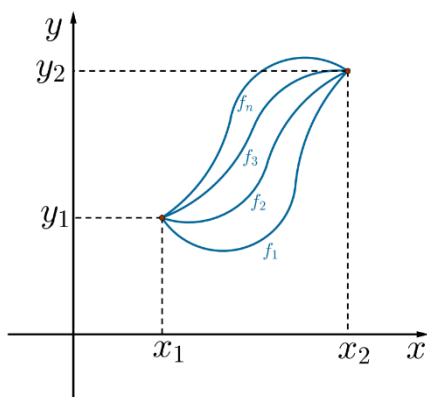


Figura 8. Gráficos de posibles funciones que conectan dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

Introducimos el símbolo δ para denotar una variación de la función $f(x)$ en todos los puntos del intervalo $[x_1, x_2]$, es decir, $\delta f(x)$. Entonces el problema anterior se traduce en resolver la ecuación $\delta F = 0$ con condiciones de borde $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$. La resolución detallada de esta ecuación se presenta en el apéndice B, aquí sólo enunciamos el resultado fundamental. La función que resuelve el problema anterior es aquella que satisface

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) - \frac{\partial g}{\partial f} = 0. \quad (\text{Ec. 34})$$

Este resultado recibe el nombre de *ecuación de Euler-Lagrange* que no es más que una ecuación diferencial de segundo orden para la función f a la que se le debe imponer las condiciones de contorno $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.

Para el caso en que el funcional ya no depende de una única función f sino que depende de todo un conjunto finito de ellas $\{f_i(x)\}$ con $i = 1, \dots, N$ se tiene que

$$F[\{f_i\}] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x, f_1(x), f_1'(x), \dots, f_N(x), f_N'(x)) \quad (\text{Ec. 35})$$

Con las condiciones $f_i(x_1) = f_i^{(1)}$, $f_i(x_2) = f_i^{(2)}$ y en tal caso, la condición extremal se obtiene resolviendo un conjunto de N ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'_i} \right) - \frac{\partial g}{\partial f_i} = 0. \quad (\text{Ec. 36})$$

Lo anterior se puede demostrar de la misma forma que para el caso de una única función escribiendo la variación δF en función de las variaciones de las funciones δf_i e imponiendo que estas variaciones son nulas en los extremos del intervalo $[x_1, x_2]$.

10.2. Apéndice B

Retomemos el problema de encontrar la función f que extrema el funcional definido en la ecuación (33). Para ello, basta con imponer $\delta F = 0$ con condiciones de borde $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ [9]. Por lo tanto, tenemos que

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx g(x, f(x), f'(x))$$

$$\int_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial g}{\partial f} \delta f + \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f' \right) \quad (\text{Ec. 37})$$

Pero $\delta f' = \delta(df/dx) = (d/dx)\delta f$. Entonces, integrando por partes el segundo término,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f' = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial g}{\partial f'} \frac{d}{dx} \delta f \quad (\text{Ec. 38})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) \delta f$$

Aplicando las condiciones de variación en los extremos, el primer término es nulo y por lo tanto obtenemos

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) \right] \delta f. \quad (\text{Ec. 39})$$

Dado que la variación $\delta f(x)$ es arbitraria, la única forma de que $\delta F = 0$ es que

$$\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0. \quad (\text{Ec. 40})$$

10.3. Apéndice C

Para deducir la ecuación (28) partamos del lagrangiano y por regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (\text{Ec. 41})$$

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange para el primer término, podemos reescribir

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (\text{Ec. 42})$$

Observemos que esto se puede reescribir como la derivada de un producto y, por lo tanto

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (\text{Ec. 43})$$

que al reordenar finalmente se obtiene el resultado

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (\text{Ec. 44})$$